

**Formação de Professores da Educação Básica e de Alunos de Licenciatura  
OBMEP na Escola e PIC 2016  
Grupo N1 - Ciclo 1**

O Programa Acadêmico desta formação de professores e de alunos de licenciatura é constituído de 6 ciclos de 4 encontros cada. Para este primeiro ciclo serão realizados os seguintes encontros:

- Primeiro encontro de formação entre professores, alunos e o coordenador
- Aritmética 1
- Contagem 1
- Geometria 1

**1ª encontro: primeiro encontro entre professores e alunos de licenciatura com o coordenador**

Este primeiro encontro de formação ocorre antes das aulas que serão ministradas para os alunos medalhistas e os alunos da rede pública. Neste encontro espera-se que sejam discutidos os conteúdos, os materiais, as videoaulas e os exercícios propostos dos três assuntos que serão ministrados nas aulas para os alunos.

- Assuntos a serem abordados:

**Aritmética:** Paridade

**Contagem:** Princípio Multiplicativo

**Geometria:** Figuras geométricas simples, áreas e perímetros

Os textos e as videoaulas que o coordenador deve abordar com os professores e os alunos de licenciatura são os mesmos que devem ser utilizados nas aulas com os alunos medalhistas e os alunos da rede pública.

**Aritmética:** Paridade

- Textos:

Seções 1.1 da Apostila do PIC “Encontros de Aritmética”, F. Dutenhefner, L. Cadar. <http://www.obmep.org.br/docs/aritmetica.pdf>

- Videoaula do Portal da Matemática:

Tópicos Adicionais – Módulo: “sistema de numeração e paridade” – Aula: “paridade” – Videoaulas:

- [Problemas envolvendo paridade](#)
- [Problemas com dominós](#)

- [Dominós, pesagens e outros problemas](#)

### **Contagem: Princípio Multiplicativo**

#### **- Textos:**

- Apresentado neste roteiro da aula
- Apostila 2 do PIC, "métodos de contagem e probabilidade" do professor Paulo Cezar Pinto Carvalho. <http://www.obmep.org.br/docs/apostila2.pdf>

#### **- Videoaula do Portal da Matemática:**

2º Ano do Ensino Médio – Módulo: "princípios básicos de contagem" – Aula: "princípio fundamental da contagem" – Videoaula: [princípio fundamental da contagem](#).

Tópicos Adicionais – Módulo: "Métodos de Contagem e Probabilidade – PIC" – Aula: "Contagem" – Videoaula – "Aula 01 – Princípio Aditivo", "Aula 2 – Princípio Multiplicativo".

### **Geometria:**

#### **- Textos:**

Seções 7.1 a 7.6 da Apostila do PIC "Encontros de Geometria – Parte 1", F. Dutenhefner, L. Cadar. <http://www.obmep.org.br/docs/Geometria.pdf>

#### **- Videoaula do Portal da Matemática:**

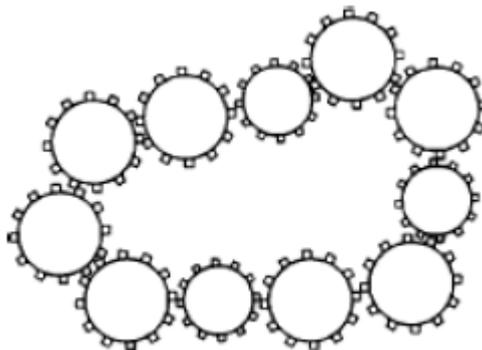
9º Ano do Ensino Fundamental – Módulo: "áreas de figuras planas" – Aula: "áreas de figuras planas: resultados básicos" – Videoaulas:

- [Área de figuras planas – Parte 1: retângulos](#)
- [Área de figuras planas – Parte 2: paralelogramos e triângulos](#)

## 2º encontro: aula sobre aritmética - paridade

- Assuntos a serem abordados: Aritmética – paridade.
- Texto a ser estudado com os alunos: o professor deverá explicar aos alunos a seção 1.1 da apostila do PIC “Encontros de Aritmética”, F. Dutenhefner, L. Cadar. <http://www.obmep.org.br/docs/aritmetica.pdf>
- Videoaula do Portal da Matemática:
  - Tópicos Adicionais – Módulo: “sistema de numeração e paridade” – Aula: “paridade” – Videoaulas:
    - [Problemas envolvendo paridade](#)
    - [Problemas com dominós](#)
    - [Dominós, pesagens e outros problemas](#)
- Exercícios a serem discutidos com os alunos: esta aula poderá ser desenvolvida praticamente através da resolução de problemas. Deste modo, na aula, o professor deverá discutir todos os exercícios resolvidos e todos os exercícios propostos na apostila. Para deixar mais claro o que se pretende com este encontro, apresentamos três exercícios que descrevem a essência dos conteúdos que deverão ser abordados na aula. Pelo menos esses exercícios devem ser discutidos na aula.

- I. Onze engrenagens estão colocadas em um plano, arrumadas em uma cadeia como está indicado na figura a seguir. Todas as engrenagens podem rodar simultaneamente?



- II. Os números de 1 a 10 estão escritos em uma linha. Pode-se colocar sinais de “mais” e de “menos” entre eles de modo que o valor da expressão resultante seja igual a zero?
- III. Todas as peças de um dominó foram colocadas em uma cadeia de modo que o número de bolinhas nas extremidades de dois dominós consecutivos são iguais. Se uma das extremidades da cadeia contém 5 bolinhas, qual é o número de bolinhas da outra extremidade da cadeia?

### 3º encontro: aula sobre contagem – Princípio Multiplicativo

- Assuntos a serem abordados: **Contagem** – Princípio Multiplicativo

- Videoaula do Portal da Matemática:

2º Ano do Ensino Médio – Módulo: “princípios básicos de contagem” – Aula: “princípio fundamental da contagem” – Videoaula: [princípio fundamental da contagem](#).

Tópicos Adicionais – Módulo: “Métodos de Contagem e Probabilidade – PIC” – Aula: “Contagem” – Videoaula – “Aula 01 – Princípio Aditivo”, “Aula 2 – Princípio Multiplicativo”.

#### Conteúdo da aula e exercícios serem resolvidos

##### 1. Introdução

A apostila 2 do PIC “métodos de contagem e probabilidade” do professor Paulo Cezar Pinto Carvalho é a principal referência bibliográfica para este encontro. No capítulo 1 desta apostila são apresentadas várias sugestões de como este assunto pode ser trabalhado com alunos dos grupos iniciais do PIC. Sugerimos que os Professores e os Coordenadores leiam este capítulo e tentem utilizá-lo na aula presencial. No Capítulo 2 do livro do Fomin e no capítulo 2 do livro “Introdução à Análise Combinatória” de José Plínio O. Santos et al. podem ser encontrados vários exemplos e exercícios que também podem ser utilizados na aula presencial e no fórum.

##### 2. O Princípio Aditivo

Neste encontro pretendemos ensinar estratégias para a resolução de problemas de contagem através da análise do problema, do uso de raciocínios simples, e sem o uso de fórmulas complicadas e que podem ser utilizadas de formas erradas. Os principais resultados que serão utilizados na resolução destes problemas são o Princípio Aditivo e o Princípio Multiplicativo, que poderão ser formalizados para a turma somente após a discussão de alguns exemplos.

Como sugerido na apostila 2, este encontro poderia começar com alguns problemas simples em que todas as possibilidades podem ser listadas diretamente e uma árvore de enumeração pode ser construída sem muitas dificuldades.

O Princípio Aditivo está muito bem explicado no [vídeo 1](#) da parte de contagem do canal picobmep no YouTube. O estudo deste vídeo faz parte integrante do planejamento desta aula. Nele são discutidos os primeiros três exercícios a seguir.

Exercício 1: Uma vila tem duas saídas ao norte e duas saídas ao sul. De quantas maneiras é possível sair da vila?

Exercício 2. Quantos são os números inteiros entre 1 e 16 que são múltiplos de 3 ou múltiplos de 7?

Exercício 3. Quantos são os números inteiros entre 1 e 16 que são múltiplos de 3 ou múltiplos de 5?

Exercício 4. Marcelo entrou em uma loja e gostou de 3 calças e de 5 camisas. De quantas maneiras diferentes Marcelo pode comprar uma das peças que ele gostou da loja?

Após explicar as soluções deste exemplos, sugerimos que o Princípio Aditivo seja formalmente enunciado e que, em seguida, as soluções destes mesmos exemplos sejam interpretadas como no enunciado do Princípio Aditivo.

*Princípio Aditivo.* Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos disjuntos, isto é, conjuntos com interseção vazia. Se  $A$  possui  $m$  elementos e se  $B$  possui  $n$  elementos, então a união  $A \cup B$  possui  $m+n$  elementos.

De modo alternativo, este princípio também pode ser enunciado do seguinte modo.

*Princípio Aditivo.* Suponha que um evento  $X$  possa ocorrer de  $x$  maneiras possíveis e que um evento distinto  $Y$  possa ocorrer de  $y$  maneiras possíveis. Então  $X$  ou  $Y$  pode ocorrer de  $x+y$  maneiras diferentes.

### 3. Princípio Multiplicativo

O Princípio Multiplicativo está muito bem explicado no [vídeo 2](#) da parte de contagem do canal picobmep no Youtube. Sugerimos que todos os alunos estudem este vídeo, onde estão resolvidos os próximos quatro exercícios.

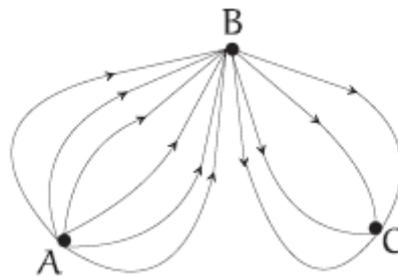
Além deste vídeo, gostaríamos de observar que no Portal da Matemática, no 2º Ano do Ensino Médio, no módulo "Princípios Básicos de Contagem", a videoaula "princípio fundamental da contagem" também explora de maneira bastante adequada os conteúdos desta aula. Sugerimos que este vídeo seja utilizado na aula.

Antes de apresentar formalmente o princípio multiplicativo, o professor poderia resolver os seguintes quatro exemplos. Nas soluções destes primeiros exemplos sugerimos que sejam listadas todas as possibilidades e que a contagem final seja relacionada com uma multiplicação. Esta atitude poderá ajudar no entendimento do princípio multiplicativo.

Exercício 5: A diagonal divide um quadrado em dois triângulos. De quantas maneiras diferentes podemos pintar um triângulo de azul ou verde, e o outro triângulo de preto, laranja ou marrom?

Exercício 6: Em uma sala estão 2 meninos e 3 meninas. De quantos modos diferentes podemos escolher um menino e uma menina dessa sala?

Exercício 7. (Fomin, capítulo 2) No País das Maravilhas existem três cidades A, B e C. Existem seis estradas ligando A a B e quatro estradas ligando B a C. De quantas maneiras é possível dirigir de A a C?



Exercício 8. Quantos são os números de dois algarismos distintos?

Exercício 9. Quantos são os pares de dois algarismos distintos?

Exercício 10. Suponha que temos uma coleção com 5 livros de álgebra, 7 livros de combinatória e 10 livros de geometria. De quantas maneiras podemos selecionar dois livros de assuntos diferentes?

Após explorar estes exercícios, o professor pode apresentar o enunciado do princípio multiplicativo.

**Princípio Multiplicativo.** Se uma decisão  $D_1$  pode ser tomada de  $p$  modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão  $D_2$  pode ser tomada de  $q$  modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões  $D_1$  e  $D_2$  é igual ao produto  $pq$ .

Apesar de aparentemente simples, muitos alunos apresentam dificuldades em empregar corretamente o princípio multiplicativo, uma vez que ele pode aparecer em situações bem variadas. Por este motivo, neste encontro presencial, quanto mais exemplos forem discutidos, melhor. Apresentamos, a seguir, mais alguns exemplos que podem ser utilizados nesta aula. Alguns destes exemplos ilustram que o Princípio Multiplicativo pode ser aplicado mesmo quando tempos mais de duas etapas de

decisão, desde que o número de possibilidades em cada etapa não dependa das decisões anteriores.

Exercício 11. (apostila 2, exercício 1, página 11) Um grupo de 4 alunos (Alice, Bernardo, Carolina e Daniel) tem que escolher um líder e um vice-líder para um debate.

- (a) Faça uma lista de todas as possíveis escolhas.
- (b) Conte o número de possíveis escolhas e verifique que o Princípio Multiplicativo fornece a resposta correta.

Exercício 12. Um time de futebol de salão com 5 jogadores precisa eleger um capitão e um vice-capitão. De quantas maneiras isto pode ser feito?

- (a) Faça uma lista de todas as possíveis escolhas.
- (b) Obtenha a quantidade de elementos desta lista com o uso do Princípio Multiplicativo.

Exercício 13. Considere as seguintes letras A, B, C, D, E, F.

- (a) Quantos anagramas, com duas letras diferentes, podem ser formados com duas destas 6 letras?
- (b) Quantos anagramas, com duas letras diferentes, e que possuem a letra A, podem ser formados com duas destas 6 letras?
- (c) Quantos anagramas de duas letras, começando com uma consoante e terminando com uma vogal, podem ser formados com estas letras?

Exercício 14. Um time de futebol de campo com 11 jogadores precisa eleger um capitão e um vice-capitão.

- (a) De quantas maneiras esta escolha pode ser feita?
- (b) Neste caso é viável listar todas estas possibilidades?

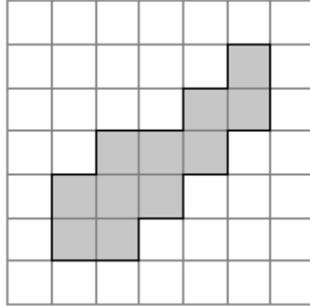
Exercício 15. (Plínio et al, exemplo 2.7, página 40)

- (a) De quantas maneiras podemos dar um livro de literatura e um livro de poesia a uma classe com 10 pessoas, de modo que os livros não sejam dados a uma mesma pessoa?

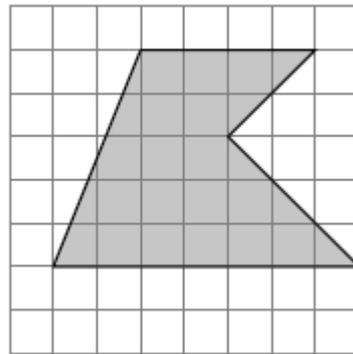
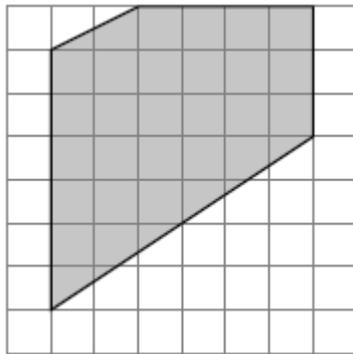
(b) E se os livros puderem ser entregues para uma mesma pessoa?

## 4º encontro: aula sobre geometria - Figuras geométricas simples, áreas e perímetros

- Assuntos a serem abordados: **Geometria** – Figuras geométricas simples, áreas e perímetros
  - Textos a serem estudados com os alunos: o professor deverá explicar aos alunos os conteúdos das seções 7.1 a 7.6 da Apostila do PIC “Encontros de Geometria – Parte 1”, F. Dutenhefner, L. Cadar (<http://www.obmep.org.br/docs/Geometria.pdf>). Neste primeiro encontro sobre geometria, o professor deve focar nos conceitos básicos, nas definições das figuras geométricas mais importantes: triângulo, quadrilátero, quadrado, retângulo, paralelogramo e trapézio. Além disso, como sugerido na apostila, deve chamar a atenção para os conceitos de área e perímetro e deve fazer explicações para as fórmulas que calculam áreas e perímetros das figuras geométricas mais simples. Nos outros encontros sobre geometria, aprofundaremos o estudo de áreas e perímetros e resolveremos exercícios mais complexos.
  - Videoaula do Portal da Matemática:
    - 9º Ano do Ensino Fundamental – Módulo: “áreas de figuras planas” – Aula: “áreas de figuras planas: resultados básicos” – Videoaulas:
      - [Área de figuras planas – Parte 1: retângulos](#)
      - [Área de figuras planas – Parte 2: paralelogramos e triângulos](#)
  - Exercícios a serem discutidos com os alunos: o professor deverá discutir todos os exemplos resolvidos nas seções de 7.1 a 7.6 da apostila “encontros de geometria”. Além desses exemplos, nas videoaulas do Portal da Matemática também podem ser encontrados outros exercícios resolvidos muito interessantes. No que segue, apresentamos três exercícios que descrevem a essência dos conteúdos que deverão ser abordados na aula. Pelo menos esses exercícios devem ser discutidos na aula.
- I. (Exemplos 2, página 90 da apostila “encontros de geometria”) Qual é a área da figura a seguir, usando como unidade a área de um quadrinho? Qual é o perímetro da figura? Quantos quadrinhos podem ser acrescentados à figura de modo a obter o máximo de área sem alterar o perímetro?



II. (Exemplos 1, página 98 da apostila “encontros de geometria”) Decompondo em figuras geométricas mais simples, calcule a área de cada uma das seguintes figuras desenhadas em uma malha de quadrados de lado 1.



III. Na figura, o quadrado ABCD tem área  $40 \text{ cm}^2$ . Os pontos P, Q, R, S são pontos médios dos lados do quadrado e T é o ponto médio do segmento RS. Qual é a área do triângulo PQT?

