Aula 2 – 6º Encontro

Combinações com Repetições

03/12/2016

1. (Exemplo 5, pág. 34, “Métodos de Contagem e Probabilidade”) Uma professora tem 3 bolas de gude para distribuir para 5 meninos (digamos Alfredo, Bernardo, Carlos, Diogo e Eduardo). De quantos modos ela pode fazer essa distribuição?

a) Supondo que ela dê as bolas para 3 alunos distintos?

b) Supondo que os contempladores possam ganhar mais de uma bola? (Por exemplo, Carlos pode receber todas as bolas).

1)

a) Supondo que ela dê as bolas para 3 alunos distintos?

Neste caso ela deve escolher 3 dentre os 5 meninos para receber as bolas.

O que pode ser feito de

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3}!}{\cancel{3}! \cdot 2!} = \frac{20}{2} = 10\, modos$$

b) Supondo que os contempladores possam ganhar mais de uma bola? (Por exemplo, Carlos pode receber todas as bolas)

Podemos resolver o problema separando a contagem em casos:

- 1ª possibilidade - 3 premiados, cada um ganhando uma bola, como já vimos no item anterior pode ser feito de $C_5^3 = 10\, modos$;
- 2ª possibilidade – 2 premiados, um ganhando uma bola e outro duas.

O primeiro pode ser escolhido de 5 modos e o segundo de 4, isto é, $5 \times 4 = 20\, modos$.

- 3ª possibilidade – um premiado, ganhando as 3 bolas, que pode ser escolhido de 5 modos.

Portanto o número total de possibilidades é

$$10 + 20 + 5 = 35$$

Outro modo de resolver este exercício é observar que o número de possibilidades é o número de listas $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ representando o número de objetos dados a Alfredo, Bernardo, Carlos, Diogo e Eduardo, respectivamente, que satisfazem a equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$$

0 | 0 | | | 0

| 0 | 00 | |

000| | | |

Observe que temos 7 símbolos que podem ser permutados entre si, isto é 7!, mas observe que temos 3 **0** e 4 **|** . Portanto devemos dividir por 3! E 4!

Assim temos

$$\frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{3!} \cdot \cancel{4!}} = 7 \cdot 5 = 35$$

Que é conhecido como ***Combinação Completa*** ou ainda ***combinação com Repetição***,

isto é,

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^p$$

Que seria

$$CR_5^3 = C_{5+3-1}^3 = C_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$$

Combinação Completa ou com Repetição

Para contar o número de maneiras de distribuir p objetos para n pessoas (ou seja, de calcular o número de soluções inteiras e não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = p$, ou ainda, de calcular o número CR_n^p de combinações completas de n elementos tomados p a p).

Temos p objetos, que devem ser separados por $n - 1$ tracinhos. Ou seja, precisamos escolher p das $n + p - 1$ posições para os objetos.

A resposta portanto é

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^p$$

2. (Exercício 17, pág. 38, “Métodos de Contagem e Probabilidade”) Uma indústria fabrica 5 tipos de balas, que são vendidas em caixas de 20 balas, de um só tipo ou sortidas. Quantos tipos diferentes de caixa podem ser fabricados?

2) Temos 5 tipos de balas. Sejam

$$x_1 = quantidade\ de\ balas\ do\ tipo\ 1\ ;$$
$$x_2 = quantidade\ de\ balas\ do\ tipo\ 2;$$
$$x_3 = quantidade\ de\ balas\ do\ tipo\ 3;$$
$$x_4 = quantidade\ de\ balas\ do\ tipo\ 4;$$
$$x_5 = quantidade\ de\ balas\ do\ tipo\ 5;$$

Para formar uma caixa, devemos selecionar 20 balas dentre os 5 tipos, valendo repetição na escolha. Ou seja, devemos formar soluções inteiras e não negativas de

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

000000|000|000|000|00000

Por exemplo a escolha acima de uma caixa qualquer representa 6 balas do tipo 1, 3 balas do tipo 2, e assim por diante.

Observe que nos resulta em 24 símbolos, isto é, C_{24}^{20}.

Ou podemos observar que em cada caixa coloca-se $p = 20\ objetos$, e temos $n = 5$ tipos .

Assim temos,

$$CR_n^p = CR_5^{20} = C_{n+p-1}^p = C_{5+20-1}^{20} = C_{24}^{20}$$

$$C_{24}^{20} = \frac{24!}{20! \cdot (24-20)!} = \frac{\cancel{24} \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot \cancel{20!}}{\cancel{20!} \cdot \cancel{4!}} = 23 \cdot 22 \cdot 21 = 10\,626$$

3. (Problema C11, pág. 213, S. Dorichenko) De quantas maneiras pode-se enviar seis cartas urgentes por seis mensageiros se cada carta pode ser entregue a qualquer um dos mensageiros?

3) Observe que não existem quaisquer restrições sobre a quantidade de cartas que um dado mensageiro deverá levar.

Então, assuma que x_i seja a quantidade de cartas que o mensageiro i irá levar, $i = 1, 2, \dots, 6$.

Portanto, o problema se resume a encontrar o número de soluções inteiras e positivas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 6$$

$$0 \;|\quad |\; 00\,|\quad |\quad |000$$

Podemos utilizar o método dos símbolos, temos 11 símbolos e 5 |,

isto é,

$$C_{11}^{5} = \frac{11!}{5!\,(11-5)!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{5! \cdot \cancel{6!}} = 462$$

Ou podemos observar que temos $p = 6\ cartas$ para $n = 6\ carteiros$, isto é,

$$CR_6^6 = C_{6+6-1}^6 = C_{11}^6 = \frac{11!}{6!\,(11-6)!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 5!} = 462$$

Observe que

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^p = C_{n+p-1}^{n-1}$$

4. (Video aula - Combinação Completa – Parte 1)
Uma pessoa quer comprar 6 empadas numa lanchonete. Há empadas de camarão, frango, legumes e palmito. Sabendo que podem ser compradas de zero a 6 empadas de cada tipo, de quntas maneiras diferentes essa compra pode ser feita?

4) Temos $n = 4$ *sabores* **C**amarão, **F**rango, **L**egumes e **P**almito. E $p = 6$ é a quantidade de empadas que irá comprar.

Assim, basta-nos encontrar o número de soluções inteiras e não negativas da equação:

$$C \;+\; F \;+\; L \;+\; P \;=6$$

$$00\;|\;0\;|\;0\;|\;00$$

Observe que temos 9 símbolos e como queremos comprar 6 empadas temos:

$$C_9^6 = \frac{9!}{6!\,(9-6)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 3!} = 84$$

Ou podemos observar que temos uma combinação com repetição de 4 elementos tomados 6 a 6, isto é,

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^p$$

$$CR_4^6 = C_{4+6-1}^6 = C_9^6 = 84$$

5. (Video aula - Combinação Completa – Parte 5)
Quantos são os anagramas da palavra PARAMETRIZADA que não possuem duas letras “A” juntas?

5) Primeiramente vamos posicionar as letras diferentes de A:

○ **P** ○ **R** ○ **M** ○ **E** ○ **T** ○ **R** ○ **I** ○ **Z** ○ **D** ○

Observe que podemos colocar as letras 4 letras A em qualquer um desses 10 espaços, e como as 4 letras são iguais, podemos posicioná-las de:

$$C_{10}^{4} = \frac{10!}{4!\cdot(10-4)!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{4!\cdot 6!} = \frac{5040}{24} = 210\ \textit{modos}$$

Agora observe que podemos permutar as 9 letras que fixamos de 9! modos, porém a letra R se repete, isto é

$$P_9^2 = \frac{9!}{2!} = \frac{362\,880}{2} = 181\,440$$

Por fim, teremos ao todo

$$210 \times 181\,440 = 38\,102\,400\ \textit{anagramas.}$$

Outro modo:

$$\_\_\_\_ \ \mathbf{A} \ \_\_\_\_ \ \mathbf{A} \ \_\_\_\_ \ \mathbf{A} \ \_\_\_\_ \ \mathbf{A} \ \_\_\_\_$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9$$

Onde x_1 é a quantidade e letras que podemos colocar no primeiro espaço, x_2 é a quantidade de letras que podemos colocar no segundo espaço e assim por diante.

Observe que x_2, x_3 e x_4 não podem ser zero, pois se forem teremos duas letras A juntas.

Assim chamemos $\begin{cases} x_2 = 1 + x_2{}' \\ x_3 = 1 + x_3{}' \\ x_4 = 1 + x_4{}' \end{cases}$

Logo, basta-nos encontrar o número de soluções inteiras e não negativas da equação:

$$x_1 + x_2' + x_3' + x_4' + x_5 = 9 - 3 = 6$$

Assim temos,

$$CR_5^6 = C_{5+6-1}^6 = C_{10}^6 = \frac{10!}{6!\,(10-6)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 4!} = 210$$

Observe que 210 é a maneira que podemos colocar as 9 letras nos espaços entre os A's, porém essas 9 letras podem ser permutadas.

Com isso, temos

$$210 \cdot P_9^2 = 210 \cdot \frac{9!}{2!} = 38\,102\,400 \; \textit{anagramas}$$

6. (Exercício 15, pág. 38, "Métodos de Contagem e Probabilidade") Quantas são as soluções inteiras e positivas de $x + y + z = 7$?

6) Quando falamos em soluções inteira positivas sabemos que

$$x > 0, y > 0 \ e \ z > 0$$

Sejam $x = 1 + a$, $y = 1 + b$ e $z = 1 + c$

O problema se transforma em encontrar todas as soluções inteiras e não negativas de

$$(1 + a) + (1 + b) + (1 + c) = 7$$
$$a + b + c = 7 - 3$$
$$a + b + c = 4$$

Onde $p = 4$ e $n = 3$

Assim,

$$CR_3^4 = C_{3+4-1}^4 = C_6^4 = \frac{6!}{4!\,(6-4)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 2!} = 15$$

7. (Exercício 16, pág. 38, "Métodos de Contagem e Probabilidade") Quantas são as soluções inteiras e não negativas da desigualdade $x + y + z \leq 6$?

7) Cada solução inteira e não negativa de

$$x + y + z \leq 6$$

Corresponde a uma solução inteira e não negativa da equação

$$x + y + z + f = 6$$

Isto é,

$$f = 6 - (x + y + z)$$

Observe que $f = 0, 1, 2, 3, 4, 5\ ou\ 6$

Assim temos os casos:

$\boldsymbol{i}$) $f = 6 \quad \Rightarrow \quad x + y + z = 0 \quad = \quad C_2^2 = \frac{2!}{2!(2-2)!} = 1$

$\boldsymbol{ii}$)$f = 5 \quad \Rightarrow \quad x + y + z = 1 \quad = \quad C_2^3 = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = 3$

$$\boldsymbol{iii}) \; f = 4 \quad \Rightarrow \quad x + y + z = 2 \quad = \quad C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

$$\boldsymbol{iv}) f = 3 \quad \Rightarrow \quad x + y + z = 3 \quad = \quad C_2^5 = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = 10$$

$$\boldsymbol{v}) \; f = 2 \quad \Rightarrow \quad x + y + z = 4 \quad = \quad C_2^6 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$$

$$\boldsymbol{vi}) f = 1 \quad \Rightarrow \quad x + y + z = 5 \quad = \quad C_2^7 = \frac{7!}{2!\,(7-2)!} = 21$$

$$\boldsymbol{vii}) \; f = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y + z = 6 \quad = \quad C_2^8 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28$$

Por fim obtemos

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 = 84 \;\; \textit{soluções}$$

Observe que

$$C_2^2 + C_2^3 + C_2^4 + C_2^5 + C_2^6 + C_2^7 + C_2^8 = C_3^9$$

$$C_3^9 = \frac{9!}{3!\,(9-3)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{3 \cdot 2 \cdot \cancel{6!}} = 84$$

Outro modo seria observar a equação:

$$x + y + z + f = 6$$

$$\mathbf{00|\ 0\ |\ 0\ |00}$$

Podemos observar que temos 9 símbolos e 3 |, isto é,

$$C_9^3 = \frac{9!}{3!\,(9-3)!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{3!\cdot \cancel{6!}} = 84$$

Ou

Que temos $p = 6$ e $n = 4$

Assim,

$$CR_4^6 = C_{4+6-1}^6 = C_9^6 = \frac{9!}{6!\,(9-6)!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}\cdot 3!} = 84$$

8. (Exemplo 1, Material Teórico – Combinações Completas) Uma sorveteria vende 6 sabores de sorvete. De quantas formas podemos comprar uma taça de sorvete com duas bolas, considerando que a ordem em que as bolas são posicionadas na taça não é importante?

8) Como o número de bolas é apenas 2, podemos calcular esse valor diretamente, sem a necessidade de introduzir técnicas novas, com uma pequena análise de casos.

Há apenas dois casos:

(i) as duas bolas são de sabores diferentes;

podemos montar a taça de C_6^2 maneiras, já que a ordem em que as bolas são escolhidas é irrelevante.

Assim, ha´

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2! \cdot 4!} = 15 \quad \textit{maneiras de montar a taça}$$

(ii) as duas bolas são do mesmo sabor;

nesse caso, basta escolhermos qual será esse sabor, o que pode ser feito de 6 maneiras.

Sendo assim, o total de maneiras de montar a taça é

$$15 + 6 = 21$$

9. (Exemplo 6, Material Teórico – Combinações Completas) De quantas maneiras podemos comprar dez picolés de uma loja que os oferece em três sabores? Assuma que a loja possui pelo menos dez picolés de cada tipo em estoque.

9) Cada maneira de comprar os picolés corresponde a uma solução da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

$$\mathbf{00000|\,000|00}$$

onde x_i representa a quantidade de picolés do tipo i, para $1 \leq i \leq 3$.

Observe que temos 12 símbolos e 2 **|**, o que nos leva a

$$C_{12}^{2} = \frac{12!}{2!\,(12-2)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{2! \cdot \cancel{10!}} = 66$$

Ou, simplesmente basta observarmos que

$p = 10\ e\ n = 3$

Assim,

$$CR_{3}^{10} = C_{3+10-1}^{10} = C_{12}^{10} = \frac{12!}{10!\,(12-10)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{\cancel{10!} \cdot 2!} = 66$$