Ciclo 2 – Encontro 1

Aritmética – divisão Euclidiana e fenômenos periódicos.

Divisão Euclidiana

Ao ser efetuada uma divisão, por exemplo a divisão indicada abaixo de 478 por 7, obtemos quociente 68 e resto 2.

$$
\begin{array}{r|l}
478 & 7 \\ \cline{2-2}
-\ 476 & 68 \\ \cline{1-1}
2 &
\end{array}
$$

Divisão Euclidiana

Isto significa que $478 = 68 \times 7 + 2$. Esta igualdade também pode ser pensada do seguinte modo. Suponhamos que você tenha 478 bolinhas e deseje separá-las em grupos de 7. Agrupando de 7 em 7 é possível organizar estas bolinhas em 68 grupos de 7 bolinhas, totalizando $68 \times 7 = 476$ bolinhas, sobrando 2 bolinhas que não podem formar um novo grupo de 7.

Divisão Euclidiana

A partir deste exemplo, e de outros se for o caso, podemos generalizar para concluir que no Algoritmo de Euclides da divisão de a por b, encontramos um quociente q e um resto r tal que $a = q \cdot b + r$ com $0 \leq r \leq b - 1$.

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

Exercício 1

Exercício 1: Em cada caso calcule o quociente q e o resto r da divisão de a por b. Em seguida tire a prova, verificando a igualdade $a = q \cdot b + r$.

- $a = 307$ e $b = 4$.
- $a = 1933$ e $b = 6$.
- $a = 879$ e $b = 7$.
- $a = 1045$ e $b = 11$.
- $a = 2351$ e $b = 12$.

Solução

a)$307=q.4+r$

$307=76.4+3$

$q=76$ $r=3$

b)$1933=q.6+r$

$1933=322.6+1$

$q=322$ $r=1$

Solução

c)879=q.7+r

879=125.7+4

q=125 r=4

d)1045=q.11+r

1045=95.11+0

q=95 r=0

Solução

e)$2351=q.12+r$

$2351=195.12+11$

$q=195$ $r=11$

Exercício 2

Exercício 2: Encontre o número natural que ao ser dividido por 7 resulta um quociente 4 e resto o maior possível.

Solução

a=q.d+r

a=4.7+r

Como o resto é o maior possível r <=d-1

Portanto r=6 por que é o maior possível

a=4.7+6

a=34

Exercício 3

Exercício 3: Encontre os números naturais que, quando divididos por 8 deixam o resto igual ao dobro do quociente.

Solução

$A=q.d+r$

$r=2q$

$d=8$

$A=8.q+2.q$

$A= 10q$

Como $2q=r$ e $r<=8-1$, ou seja, r pode ser no máximo 7 então

$2q <=7$

$q<=3,5$ ou seja $q<=3$ pois estamos tratando apenas de números naturais

Solução

Portanto, $q=1$ ou $q=2$ ou $q=3$

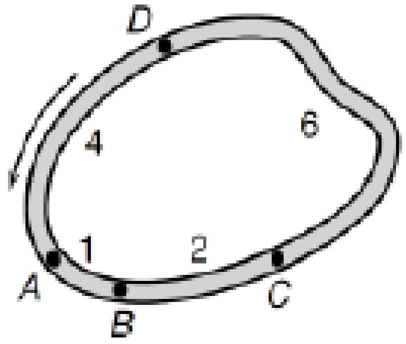
$A=10.1=10$

$A=10.2=20$

$A=10.3=30$

Exercício 4

Exercício 4: (OBMEP 2006 - N1Q6 - 2ª fase) A figura abaixo representa o traçado de uma pista de corrida.



Os postos A, B, C e D são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela

Exercício 4

flecha. Por exemplo, uma corrida de 17 quilômetros pode ser realizada com partida em D e chegada em A.

(a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?

(b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são estes postos?

(c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

Solução

(a) Uma volta completa em torno de uma pista tem extensão $1km + 2km + 6km + 4km = 13km$. Por isto, para percorrer $14km$ é preciso dar uma volta completa e percorrer mais $1km$. A única forma de percorrer $1km$ respeitando-se o sentido da corrida é começando em A e terminando em B. Portanto a corrida deve começar em A, dar uma volta completa e terminar em B.

Solução

(b) Como $100 = 7 \times 13 + 9$, uma corrida de $100km$ corresponde a dar 7 voltas completas na pista e percorrer mais $9km$. A única forma de percorrer $9km$ respeitando-se o sentido da corrida é começando em A e terminando em D. Portanto a corrida deve começar em A, dar 7 voltas completas e terminar em D.

Solução

(c) Como sugerido nos itens anteriores, a solução do problema está baseada na ideia de "dar uma certa quantidade de voltas" sem exceder o comprimento da corrida e depois localizar trechos convenientes para percorrer a "distância restante". Do ponto de vista matemático, este procedimento corresponde a efetuar o algoritmo de divisão com divisor igual a 13. Por uma inspeção direta, pode-se

Solução

verificar que é possível executar qualquer corrida com comprimento igual a 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou $12km$. Se a corrida tem comprimento um múltiplo qualquer de $13km$, podemos começar num ponto, dar um certo número de voltas, e voltar para o mesmo ponto de partida. E se a corrida tem um comprimento maior que 13, efetuamos a divisão deste número por 13. O quociente corresponde ao número de voltas e o resto é um pedaço de uma volta de comprimento de $1km$ até $12km$, que sempre pode ser percorrido, como comentamos anteriormente.

Por exemplo, se a extensão da corrida é $109 = 8 \times 13 + 5$, ela deve começar no posto D, dá 8 voltas completas, retornando então a D, e depois percorre o trecho de D a B, que tem $5km$.

Exercício 5

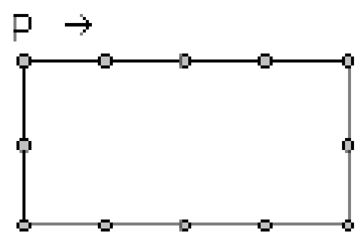
Exercício 5: Na divisão de dois números inteiros, o quociente é 16 e o resto é o maior possível. Se a soma do dividendo e do divisor é 125, determine o resto.

Solução

Solução. Vamos representar por a o dividendo e por b o divisor. Como o resto é o maior possível, então ele deve ser igual a $b-1$, que é o maior número permitido para o resto de uma divisão por b. Daí obtemos $a = 16b + (b-1)$, ou seja, $a = 17b - 1$. Como a soma $a + b = 125$ obtemos $(17b-1)+b = 125 \Rightarrow 18b = 126 \Rightarrow b = \dfrac{126}{18} = 7$. Portando o divisor é $b = 7$, o dividendo é $a = 17b - 1 = 118$, o quociente é 16 e o resto é 6.

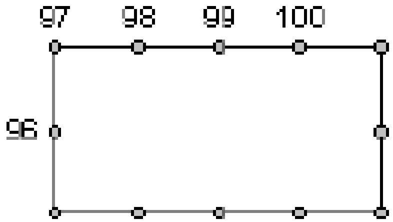
Exercício 6

Exercício 6: Pedro caminha ao redor de uma praça retangular onde estão dispostas 12 árvores, brincando de tocar cada árvore durante seu passeio. Se no início ele toca a árvore indicada na figura, e se ele anda no sentido da seta, indique que árvore ele estará tocando ao encostar em uma árvore pela centésima vez.



Solução

Solução. Na figura, próximo de cada árvore escreva os números 1, 2, 3, ..., correspondentes aos números de árvores tocadas por Pedro (a árvore indicada pela letra P recebe o número 1, a próxima o número 2, e assim por diante). Como existem 12 árvores na praça, na árvore indicada pela letra P estarão escritos os número 1, 13, 25, ... que são todos os números que deixam resto 1 quando divididos por 12. Dividindo 100 por 12, obtemos quociente 8 e resto 4, isto é, $100 = 8 \times 12 + 4$. Daí vemos que na centésima vez, Pedro estará tocando a árvore que está 3 posições à frente daquela indicada pela letra P.



Exercício 7

Exercício 7: Considere a seguinte sequência de números:

$$1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$$

formada alternadamente pelos algarismos (1, 2, 3, 4, 5) e pelos algarismos (5, 4, 3, 2, 1). Qual algarismo aparece na posição 2015 nesta sequência?

Solução

Solução. Na sequência dada é importante observar que o bloco de algarismos

$$1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2$$

fica se repetindo indefinidamente, como está ilustrado na figura a seguir:

1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2	1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2	1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2	⋯

Dividindo 2015 por 8 (que é a quantidade de algarismos do bloco que fica se repetindo), obtemos $2015 = 251 \times 8 + 7$. Daí, para se chegar até o algarismo da posição 2015, deve-se escrever 251 blocos de oito algarismos cada, e depois mais sete algarismos. Portanto o número que está na posição 2015 é o número da sétima posição dentro do bloco, ou seja, o número 3.

Exercício 8

Exercício 8: Qual é o algarismo da unidade de 2^{2015} ?

Solução

Solução. Calculando as primeiras potências de 2 obtemos:

$$2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32,\ 2^6 = 64,$$

$$2^7 = 128,\ 2^8 = 256,\ 2^9 = 512$$

Observando esses números, vemos que os últimos algarismos formam uma sequência periódica: 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2 etc., em que os quatro números 2, 4, 8, 6 ficam se repetindo infinitamente. Dividindo 2015 por 4 obtemos quociente 503 e resto 3, de modo que $2015 = 503 \times 4 + 3$. Na sequência acima, os expoentes que deixam resto 3 quando divididos por 4 definem potências de 2 com último algarismo 8 ($2^3 = 8$, $2^7 = 128$ etc.). Daí o algarismo da unidade de 2^{2015} é 8.

Exercício 9

Exercício 9: João decidiu nadar de três em três dias. O primeiro dia que ele nadou foi um sábado, o segundo dia foi uma terça-feira, o terceiro dia foi uma sexta-feira, e assim por diante. Em qual dia da semana João estará nadando pela centésima vez?

Solução

Solução. Na tabela a seguir, listamos os dias da semana que João está nadando pelas primeiras 21 vezes.

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
6	4	2	7	5	3	1
13	11	9	14	12	10	8
20	18	16	21	19	17	15

Analisando a tabela vemos, por exemplo, que os múltiplos de 7 sempre estão na quarta-feira, que os números que deixam resto 1 quando divididos por 7 estão no sábado e que os números que deixam resto 2 quando divididos por 7 estão na terça-feira. Dividindo 100 por 7 obtemos quociente 14 e resto 2 $(100 = 14 \times 7 + 2)$. Daí concluímos que na centésima vez, João estará nadando em uma terça-feira.

Exercício 10

Exercício 10: O ano de 2014 começou em uma quarta-feira. Em que dia da semana cairá o último dia deste ano?

Solução

Um ano tem 365 dias

Uma semana tem 7 dias

q vai corresponder ao número de semanas completas e r quantos dias sobram

$365=7.q+r$

$q=52$ e $r=1$

$365=7.52+1$

Como o ano começa na quarta as semanas seriam contadas de quarta até terça e soma 1 dia portanto o ultimo dia seria um dia depois de terça, logo quarta-feira seria o ultimo dia.

Exercício 11

Exercício 11: (Fomin, capítulo 3, problema 28) Encontre o último algarismo do número 1989^{1989}.

Solução

Solução. Para começar, note que o último algarismo do número 1989^{1989} é igual ao último algarismo do número 9^{1989}. Escrevendo as primeiras potências de 9 obtemos: $9^1 = 9$, $9^2 = 81$, $9^3 = 729$ etc. Daí observamos que os últimos algarismos destes números formam a sequência 9, 1, 9, 1 etc. Assim o último algarismo de 9^n é 9 se n é ímpar e o último algarismo de 9^n é 1 se n é par.

Solução

Observamos que para resolver este tipo de problema, não é necessário calcular as potências de 9. Basta calcular o último algarismo das potências de 9. Para fazer isso, começamos por $9^1 = 9$. Multiplicando por 9, obtemos $9 \times 9 = 81$. Para calcular o último algarismo de 9^3, multiplicamos o último algarismo de 9^2 por 9, obtendo $1 \times 9 = 9$. Então o último algarismo de 9^3 é 9. E assim, por diante, vamos olhando sempre para o último algarismo dos produtos, e efetuado o produto, consideramos somente o seu último algarismo para fazer a próxima multiplicação.

Exercício 12

Exercício 12: (Fomin, capítulo 3, problema 30) Encontre o último algarismo do número 777^{777}.

Solução

Solução. Para começar, note que o último algarismo do número 777^{777} é igual ao último algarismo do número 7^{777}. Procedendo como explicado no exercício anterior, podemos calcular o último algarismo das primeiras potências de 7.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
último algarismo de 7^n	7	9	3	1	7	9	3	1	7

Daí vemos que o ciclo 7, 9, 3, 1 se repete infinitamente. Dividindo 777 por 4 (que é o tamanho do ciclo), obtemos quociente 194 e resto 1. Daí o último algarismo de 7^{777} é igual ao último algarismo de 7^1, que é 7.

Exercício 13

Exercício 13: Qual é o resto da divisão de 2^{56} por 7? E por 11?

Solução

Bom temos dois caminhos um deles seria resolver aqueles números enormes outro seria calcular os restos e ver as repetição

Dividindo por 7

2 tem resto 2

2.2=4 tem resto 4

2.2.2=8 tem resto 1

2.2.2.2=16 tem resto 2

2.2.2.2.2=32 tem resto 4

2.2.2.2.2.2=64 tem resto 1

Bom vemos que a repetição do resto é de 3 em 3

Solução

Agora dividimos 56 por 3

$56=q.3+r$

$56=18.3+2$

Bom seguindo a sequência tem que aqueles resto se repetiriam 18 vezes e mais 2 números que seriam o 2 e o 4

Portanto, o resto da divisão seria 4

Solução

Para o 11 faremos a mesma coisa

Dividindo por 11

2 tem resto 2 2.2=4 tem resto 4 2.2.2=8 tem resto 8

2.2.2.2=16 tem resto 5 2.2.2.2.2=32 tem resto 10

2.2.2.2.2.2=64 tem resto 9 2.2.2.2.2.2.2=128 tem resto 7

2.2.2.2.2.2.2.2=256 tem resto 3

2.2.2.2.2.2.2.2.2=512 tem resto 6

2.2.2.2.2.2.2.2.2.2=1024 tem resto 1

A partir dai começarão a se repetir os resto portanto as repetições seriam de 10 em 10 divida 56 por 10 .

Solução

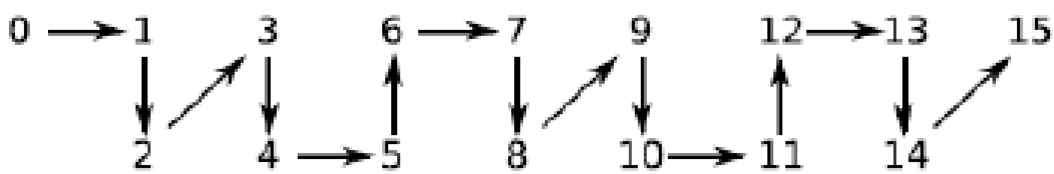
$56=q.10+r$

$56=5.10+6$

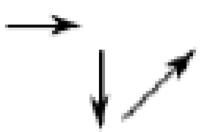
Portanto o resto seria 9

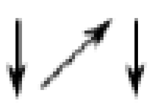
Exercício 14

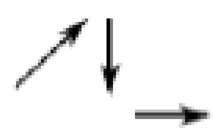
Exercício 14: (Banco de Questões 2010, nível 1, problema 86) Os números de 0 a 2000 foram ligados por flechas. A figura dada mostra o começo do processo.

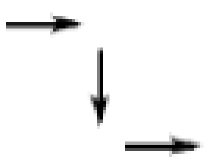


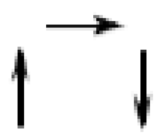
Qual é a sucessão de flechas que liga o número 1997 ao número 2000?

(a) 

(b) 

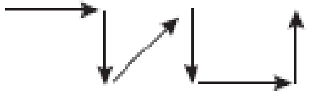
(c) 

(d) 

(e) 

Solução

Solução. A alternativa correta é a (e). Observe que o seguinte caminho, formado por seis flechas, é um padrão que se repete na figura dada.

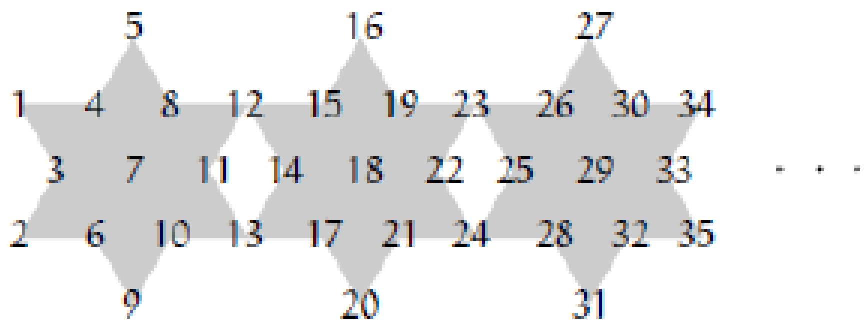


Este caminho-padrão sempre começa nos múltiplos de 6, ou seja, em 0, 6, 12 etc. Vamos averiguar qual é a posição de 1997 em relação ao múltiplo de 6 mais próximo. Dividindo 1997 por 6, obtemos $1997 = 6 \times 332 + 5$, correspondendo a 332 caminhos-padrão mais o resto de 5 flechas. Portanto, 1998 é múltiplo de 6 mais próximo de 1997, ocupando a primeira posição no caminho-padrão. Assim, a figura seguinte ilustra as flechas que ligam 1997 a 2000.

$$
\begin{array}{ccc}
1998 & \longrightarrow & 1999 \\
\uparrow & & \downarrow \\
1997 & & 2000
\end{array}
$$

Exercício 15

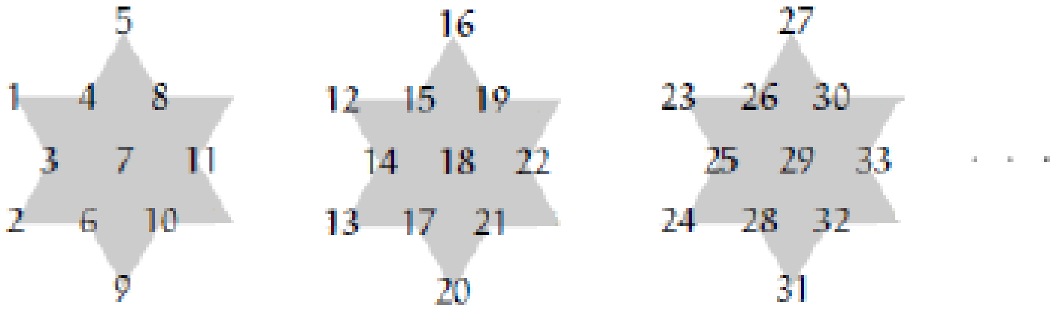
Exercício 15: (Banco de Questões 2011, nível 1, problema 10) Estrelix, um habitante de Geometrix, decidiu colocar os inteiros positivos seguindo a disposição indicada na figura.



Em quais estrelas aparece o número 2011? Posicione todos os números que aparecem nas referidas estrelas?

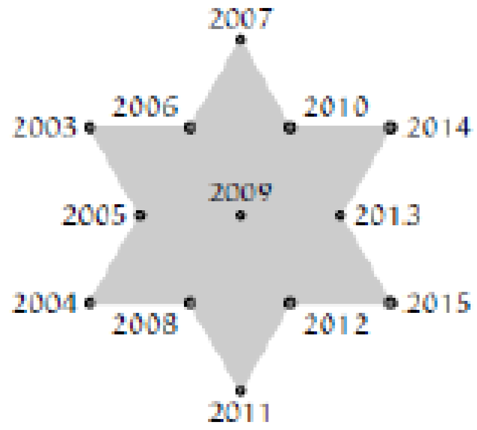
Solução

Solução. Separe as estrelas deixando os números compartilhados sempre na estrela à direita. Fazendo isto, como indicado na figura a seguir, vemos que em cada estrela ficam escritos 11 números.



Solução

Dividindo 2011 por 11, obtemos quociente 182 e resto 9. Assim, o número 2011 é o nono número da 183ª estrela, que está representada na figura ao lado.



Exercício 14

Solução