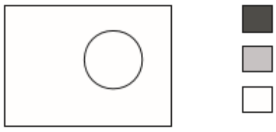
Métodos de Contagem

Problemas de contagem são, muitas vezes, considerados difíceis entre alunos e professores, apesar de as técnicas matemáticas necessárias serem bastante elementares: essencialmente, o conhecimento das operações aritméticas de soma, subtração, multiplicação e divisão. O objetivo deste material é habituar o aluno a trabalhar com problemas de contagem e a ver que, afinal de contas, tais problemas podem ser resolvidos com raciocínios simples na grande maioria dos casos, sem exigir o uso de fórmulas complicadas. É isto o que procuramos mostrar nos exemplos a seguir.

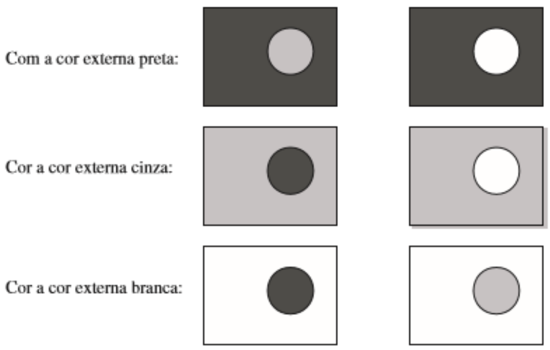
Exemplo 1. Uma bandeira com a forma abaixo vai ser pintada utilizando duas das cores dadas.



(a) Liste todas as possíveis bandeiras. Quantas são elas?
Solução: É importante ter um procedimento sistemático para listar todas as possíveis bandeiras, sem repeti-las. Para tal, devemos identificar as diferentes decisões a serem tomadas e examinar todas as possibilidades para cada uma delas. No caso deste problema, uma forma natural para planejar o preenchimento da bandeira é:

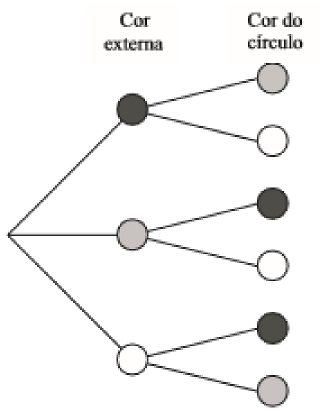
- escolher a cor a ser utilizada para a parte externa;
- a seguir, escolher a cor para o círculo interno.

A primeira decisão pode ser feita de 3 modos diferentes, já que a cor externa pode ser qualquer uma das disponíveis. Uma vez tomada esta decisão, a cor escolhida não podemais ser usada para o círculo interno. Por exemplo, se a cor preta for escolhida para a parte externa, a cor interna deverá ser cinza ou branca. Podemos, então, listar todas as possíveis bandeiras, que são 6, de acordo com a figura abaixo.



Um fato importante, que pode ser explorado na contagem eficiente do número possível de bandeiras, é o seguinte: as cores disponíveis para pintar o círculo

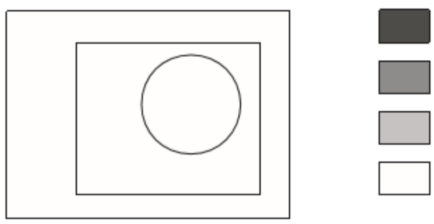
mudam de acordo com a escolha da parte externa, mas a sua quantidade é sempre a mesma, já que, qualquer que seja a cor externa escolhida, há sempre duas cores restantes para o círculo. Portanto, poderíamos ter empregado o seguinte raciocínio para contar o número de possíveis bandeiras, sem listá-las:
A cor externa pode ser escolhida de três modos diferentes. Qualquer que seja essa escolha, a cor do círculo pode ser escolhida de dois modos. Logo, o número total de possibilidades é $2 + 2 + 2 = 3 \times 2 = 6$.
O procedimento acima ilustra o Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem:
Se uma decisão$D1$ pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja essa escolha, a decisão $D2$ pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões $D1$ e $D2$ é igual a pq.
O Princípio Multiplicativo pode ser ilustrado com o auxílio de uma árvorede enumeracção como a da figura a seguir.



(b) Quantas são as possíveis bandeiras no caso em que 4 cores estão disponíveis?

Solução: As decisões a serem tomadas são exatamente as mesmas do caso anterior, tendo mudado apenas o número de possibilidades de escolha. Para a cor externa, temos agora 4 possibilidades. Uma vez escolhida a cor externa, a cor do círculo pode ser qualquer uma das outras 3. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o número de modos diferentes para pintar a bandeira é $4 \times 3 = 12$.

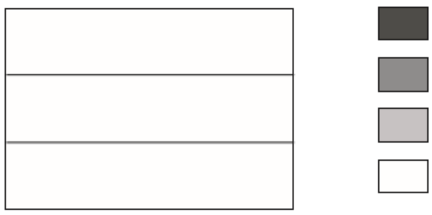
Exemplo 2. Quantas são as formas de pintar a bandeira a seguir utilizando 3 cores diferentes dentre 4 dadas?



Solução: Agora, temos 3 decisões consecutivas a tomar: a cor externa, a do

retângulo e a do círculo. A cor externa pode ser qualquer uma das 4 cores; uma vez escolhida a cor externa, o retângulo pode ser pintado de três modos distintos. Logo, a escolha combinada da cor externa e do retângulo pode ser feita de $4 \times 3 = 12$ modos. Para cada um destes 12 modos, o círculo pode ser pintado com uma das duas cores que sobraram. Logo, o número total de possibilidades é $4 \times 3 \times 2 = 24$.
O raciocínio acima mostra que o Princípio Multiplicativo pode, na realidade, ser aplicado quando temos diversas etapas de decisão: desde que o número de possibilidades em cada etapa não dependa das decisões anteriores, basta multiplicá-los para achar o número total de possibilidades.

Exemplo 3. Para pintar a bandeira abaixo, há 4 cores disponíveis. De quantos modos ela pode ser pintada de modo que faixas adjacentes tenham cores distintas?



Solução: O primeiro passo é escolher em que ordem vamos pintar a bandeira. Podemos, por exemplo, pintar as faixas de cima para baixo. A cor da primeira faixa pode ser qualquer uma das 4 cores. Qualquer que seja a cor escolhida, para a segunda faixa temos 3 cores para escolher. Escolhida a cor da segunda faixa, a terceira pode ser pintada de qualquer cor, exceto a usada para a segunda faixa. Assim, temos novamente 3 possibilidades de escolha.

O número total de possibilidades é, então:

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & \times & 3 & \times & 3 & = & 36 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1^{\underline{a}} \text{ faixa} & & 2^{\underline{a}} \text{ faixa} & & 3^{\underline{a}} \text{ faixa} & & \end{array}$$

Exemplo 4. Quantos são os números de três algarismos distintos?

Solução: Vamos escolher, sucessivamente, os três algarismos, começando com o da esquerda (isto é importante, como veremos abaixo). O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual a 0. O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro algarismo. O terceiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos, pois não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo algarismo.

A resposta é $9 \times 9 \times 8 = 648$.

Estratégias para resolver os problemas de contagem

1. **Postura:** Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar. Nas diversas situações dos Exemplos 1 a 3, nós nos colocamos no papel da pessoa que deveria colorir a bandeira; no Exemplo 4, colocamo-nos no papel da pessoa que deveria escrever o número.

2. **Divisão:** Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, correspondentes às diversas etapas do processo de decisão. Colorir a bandeira foi dividido em colorir cada região; formar um número de três algarismos foi dividido em escolher cada um dos três algarismos. Formar a palavra no código Morse foi dividido em escolher o número de letras e, a seguir, em escolher cada letra.

   A ordem em que as decisões são tomadas pode ser extremamente importante para a simplicidade do processo de resolução. Vamos voltar ao Exemplo 4 (Quantos são os números de três algarismos distintos?) para ver como uma estratégia equivocada pode levar a uma solução desnecessariamente complicada.

   Começando a escolha dos algarismos pelo último algarismo, há 10 modos de escolher o último algarismo. Em seguida, há 9 modos de escolher o algarismo central, pois não podemos repetir o algarismo já usado. Agora temos um impasse: de quantos modos podemos escolher o primeiro algarismo? A resposta é "depende". Se não tivermos usado o 0, haverá 7 modos de escolher o primeiro algarismo, pois não poderemos usar nem o 0 nem os dois algarismos já usados nas demais casas; se já tivermos usado o 0, haverá 8 modos de escolher o primeiro algarismo.

3. **Não adiar dificuldades:** Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. No Exemplo 4, a escolha do primeiro algarismo era uma decisão mais restrita do que as outras, pois o primeiro algarismo não pode ser igual a 0. Essa é, portanto, a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar, e, conforme acabamos de ver, postergá-la só serve para causar problemas.

Exemplo 5. Quantos são os números pares de três algarismos distintos?

Solução: Há 5 modos de escolher o último algarismo. Note que começamos pelo último algarismo, que é o mais restrito; o último algarismo só pode ser 0, 2, 4, 6 ou 8.

Em seguida, vamos ao primeiro algarismo. De quantos modos se pode escolher o primeiro algarismo? A resposta é "depende": se não tivermos usado o 0, haverá 8 modos de escolher o primeiro algarismo, pois não poderemos usar nem o 0 nem o algarismo já usado na última casa; se já tivermos usado o 0, haverá 9 modos de escolher o primeiro algarismo, pois apenas o 0 não poderá ser usado na primeira casa.

Assim, apesar de termos procurado atacar inicialmente a escolha mais restrita, chegamos a um impasse no uso do Princípio Multiplicativo. Esse tipo de impasse é comum na resolução de problemas e há dois métodos para vencê-lo.

O primeiro método consiste em voltar atrás e contar separadamente.

Contaremos separadamente os números que terminam em 0 e os que não terminam em 0. Comecemos pelos que terminam em 0. Há 1 modo de escolher o último algarismo, 9 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o algarismo central. Há, portanto, $1 \times 9 \times 8 = 72$ números de três algarismos distintos terminados em 0.

Para os que não terminam em 0, há 4 modos de escolher o último algarismo, 8 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o algarismo central. Há $4 \times 8 \times 8 = 256$ números pares de três algarismos distintos que não terminam em 0.

A resposta é $72 + 256 = 328$.

O segundo método consiste em ignorar uma das restrições do problema, o que nos fará contar em demasia. Depois descontaremos o que houver sido contado indevidamente.

Primeiramente fazemos de conta que o 0 pode ser usado na primeira casa do número. Procedendo assim, há 5 modos de escolher o último algarismo (só pode ser 0, 2, 4, 6 ou 8), 9 modos de escolher o primeiro algarismo (não podemos repetir o algarismo usado na última casa – note que estamos permitindo o uso do 0 na primeira casa) e 8 modos de escolher o algarismo central. Há $5 \times 9 \times 8 = 360$ números, aí inclusos os que começam por 0.

Agora vamos determinar quantos desses números começam por zero; são esses os números que foram contados indevidamente. Há 1 modo de escolher o primeiro algarismo (tem que ser 0), 4 modos de escolher o último (só pode ser 2, 4, 6 ou 8 – lembre-se de que os algarismos são distintos) e 8 modos de escolher o algarismo central (não podemos repetir os algarismos já usados). Há $1 \times 4 \times 8 = 32$ números começados por 0.

A resposta é $360 - 32 = 328$.

Exemplo 6. De quantos modos diferentes 6 pessoas podem ser colocados em fila?

Solução: Este é um problema clássico de contagem, chamado de problema das permutações simples, que é facilmente resolvido pelo Princípio Multiplicativo. De fato, basta escolher sucessivamente as pessoas colocadas em cada posição da fila. Para escolher o primeiro da fila, temos 6 possibilidades; o segundo pode ser qualquer uma das 5 pessoas restantes, e assim por diante. Logo, o número total de possibilidades é $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$. De um modo geral, o número de modos de ordenar n objetos é igual a $n \times (n-1) \times ... \times 1$, que é representado por $n!$ (lê-se: n fatorial).

Exemplo 7. De quantos modos podem-se escolher três dos jogadores de um time de futebol para representá-lo em uma cerimônia de premiação?

Solução: Este é um outro problema clássico de contagem, chamado de problema das combinações simples. À primeira vista, parece ser simples resolvê-lo pelo Princípio Multiplicativo: basta escolher um representante de cada vez. O primeiro pode ser escolhido de 11 modos, o segundo, de 10 e o terceiro, de 9. Logo, o número total de possibilidades parece ser $11 \times 10 \times 9 = 990$. Esta solução está incorreta, mas podemos consertá-la para chegar à resposta certa. Suponha que tivéssemos escolhido, sucessivamente, os jogadores A, B e C. A comissão de representantes assim formada seria exatamente a mesma se tivéssemos selecionado, por exemplo, primeiro B, depois A, depois C. No entanto, as duas escolhas foram contadas por nós como se fossem distintas. O que nos permite corrigir o resultado da contagem é o fato de que todas as possíveis comissões são repetidas o mesmo número de vezes, correspondente a todas as suas possíveis ordenações. Por exemplo, A, B e C vão surgir, em nosso processo de enumeração, $3 \times 2 \times 1 = 6$ vezes, o mesmo ocorrendo com todas as possíveis comissões. Logo, o número correto de comissões é igual a $\dfrac{990}{6} = 165$.
De modo geral, o número de modos de escolher p dentre n objetos é representado por C_n^p(lê-se: combinação de n tomados p a p) e é igual a $\dfrac{n \times (n-1)...(n-p+1)}{p \times (p-1)...1}$.

Exemplo 8. Um hospital tem os seguintes funcionários:
Sara Dores da Costa: reumatologista
Iná Lemos: pneumologista
Ester Elisa: enfermeira
Ema Thomas: traumatologista
Ana Lisa: psicanalista
Inácio Filho: obstetra

a) De quantas maneiras os funcionários podem fazer uma fila?

   Solução: Para ser o primeiro da fila, podemos escolher qualquer um dos seis funcionários. Logo, há 6 possibilidades. Escolhido o primeiro da fila, restam cinco funcionários a serem escolhidos para ser o segundo da fila (porque um já foi escolhido). Para o terceiro lugar termos 4 possibilidades, e assim por diante. Logo, há $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ maneiras distintas de organizar a fila.

b) De quantas maneiras os mesmos funcionários podem sentar numa mesa redonda? Lembre-se que, numa mesa redonda, se todos se mudam para a cadeira da esquerda, a mesa continua igual!

   Solução: Numa mesa redonda, só importa a posição relativa, como foi dito no enunciado. Se movermos cada funcionário para a cadeira à sua esquerda, a mesa continua igual. Quantas vezes podemos fazer isso? De

6, já que são seis funcionários. Se numerarmos as cadeiras, teríamos a mesma resposta do item anterior, 720. Como podemos girar as pessoas para a cadeira ao lado 6 vezes, concluímos que o número de maneiras de colocar os funcionários na mesa é $\frac{720}{6} = 120$.

c) E de quantas maneiras os funcionários podem compor uma comissão formada por presidente, vice-presidente e suplente?

Solução: Podemos escolher o presidente de 6 maneiras, já que são 6 funcionários. Para cada uma dessas escolhas, teremos 5 possibilidades para escolher o vice. E para uma dessas, 4 para o suplente. Logo, são $6 \times 5 \times 4 = 120$ maneiras de escolher a comissão.

Exemplo 9. Em uma sala de aula há uma turma de dez alunos. Precisa-se escolher uma comissão de três alunos para representar esta turma, sendo a comissão composta por: um porta-voz, um diretor de artes e um assessor técnico. Nenhum aluno pode acumular cargos.

a) De quantas maneiras esta comissão pode ser formada?

Solução: Para escolher o porta-voz, temos 10 possibilidades, já que são dez alunos. Escolhido o porta-voz, temos agora 9 possibilidades para escolher o aluno que será o diretor de artes. Finalmente, para escolher o assessor técnico, restam 8 possibilidades. Logo, temos $10 \times 9 \times 8 = 720$ maneiras diferentes para escolher a comissão pedida.

b) Quantas comissões diferentes podem ser formadas com os alunos Leandro, Renato e Marcelo?

Solução: Podemos listar todas as comissões que têm os três alunos Marcelo, Leandro e Renato. Estas são:

Porta-voz	**Diretor de Artes**	**Assessor Técnico**
Marcelo	Renato	Leandro
Marcelo	Leandro	Renato
Renato	Leandro	Marcelo
Renato	Marcelo	Leandro
Leandro	Marcelo	Renato
Leandro	Renato	Marcelo

Logo, temos seis comissões possíveis. Outra maneira de obter o mesmo resultado seria: para escolher o porta-voz, temos 3 possibilidades dentre Marcelo, Renato e Leandro. Escolhido o porta-voz, restam duas possibilidades para escolher o diretor de artes. E escolhidos os dois cargos anteriores, só resta uma possibilidade para escolher o último cargo. Logo, temos $3 \times 2 \times 1 = 6$ maneiras diferentes para escolher uma comissão que tenha os alunos Marcelo, Leandro e Renato.

c) Considere agora comissões sem cargos específicos. Use os itens a) e b) anteriores para descobrir quantas comissões sem cargos específicos podem ser formadas.

Solução: Agora não há mais cargos. Logo, as comissões listadas no item b) são todas iguais (representam a mesma comissão formada por Marcelo, Renato e Leandro). Para contar quantas são as comissões sem cargo, vamos agrupar as comissões com cargos (porta-voz, diretor de artes e assessor técnico) em grupos de seis comissões que tenham os mesmos três alunos. Como são 720 comissões com cargo, e são grupos de 6 com as mesmas pessoas, obtemos $\frac{720}{6} = 120$ maneiras diferentes de compor uma comissão sem cargos.

Exemplo10. Um costrutor dispõe de quatro cores(verde, amarelo, cinza e bege) para pintar 5 casas dispostas lado a lado. Ele deseja que cada casa seja pintada com apenas uma cor e que duas casas consecutivas não possuam a mesma cor. Por exemplo, duas possibilidades diferentes de pintura estão indicadas.

- verde, amarela, bege, verde e cinza.
- verde, cinza, verde, bege, cinza.

*Solução:*Temos 5 casas para pintar e disponho de 4 cores, então para a primeira casa eu tenho 4 possibilidades, para a segunda 3 possibilidades, pois duas casas consecutivas não podem ter a mesma cor, para a terceira casa também tenho 3 possibilidades, por que só não se pode pintar com a cor que foi pintada a casa anterior e então seguindo está lógica, para a quarta e a quinta casa terei 3 possibilidades, então há $4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 324$ possibilidades de pintar as casas.