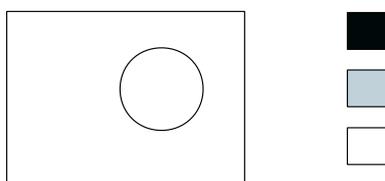


# Capítulo 1

## Métodos de Contagem

Problemas de contagem são, muitas vezes, considerados difíceis entre alunos e professores, apesar de as técnicas matemáticas necessárias serem bastante elementares: essencialmente, o conhecimento das operações aritméticas de soma, subtração, multiplicação e divisão. O objetivo deste material é habituar o aluno a trabalhar com problemas de contagem e a ver que, afinal de contas, tais problemas podem ser resolvidos com raciocínios simples na grande maioria dos casos, sem exigir o uso de fórmulas complicadas. É isto o que procuramos mostrar nos exemplos a seguir.

**Exemplo 1.** Uma bandeira com a forma abaixo vai ser pintada utilizando duas das cores dadas.



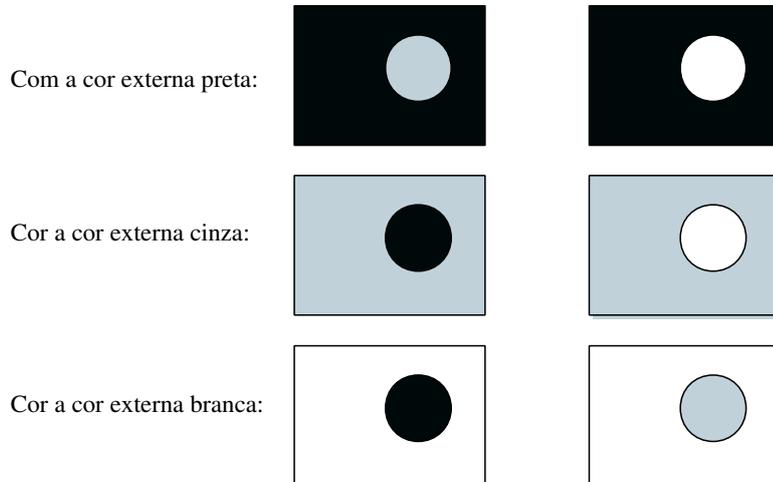
(a) *Liste todas as possíveis bandeiras. Quantas são elas?*

*Solução:* É importante ter um procedimento sistemático para listar todas as possíveis bandeiras, sem repeti-las. Para tal, devemos identificar as diferentes decisões a serem tomadas e examinar todas as possibilidades para cada uma delas. No caso deste problema, uma forma natural para planejar o preenchimento da bandeira é:

- escolher a cor a ser utilizada para a parte externa;
- a seguir, escolher a cor para o círculo interno.

A primeira decisão pode ser feita de 3 modos diferentes, já que a cor externa pode ser qualquer uma das disponíveis. Uma vez tomada esta decisão, a cor escolhida não pode mais ser usada para o círculo interno. Por exemplo, se a cor preta for escolhida para a parte externa, a cor interna deverá ser cinza ou branca.

Podemos, então, listar todas as possíveis bandeiras, que são 6, de acordo com a figura abaixo.



Um fato importante, que pode ser explorado na contagem eficiente do

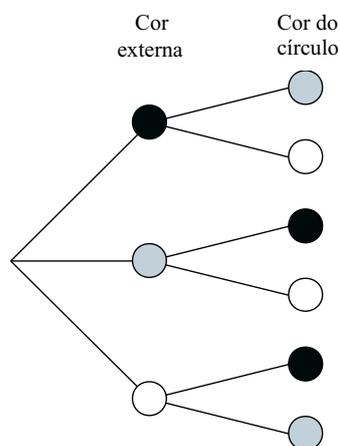
número possível de bandeiras, é o seguinte: as cores disponíveis para pintar o círculo mudam de acordo com a escolha da parte externa, mas a sua quantidade é sempre a mesma, já que, qualquer que seja a cor externa escolhida, há sempre duas cores restantes para o círculo. Portanto, poderíamos ter empregado o seguinte raciocínio para contar o número de possíveis bandeiras, sem listá-las:

*A cor externa pode ser escolhida de três modos diferentes. Qualquer que seja essa escolha, a cor do círculo pode ser escolhida de dois modos. Logo, o número total de possibilidades é  $2 + 2 + 2 = 3 \times 2 = 6$ .*

O procedimento acima ilustra o *Princípio Multiplicativo* ou *Princípio Fundamental da Contagem*:

*Se uma decisão  $D_1$  pode ser tomada de  $p$  modos e, qualquer que seja essa escolha, a decisão  $D_2$  pode ser tomada de  $q$  modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões  $D_1$  e  $D_2$  é igual a  $pq$ .*

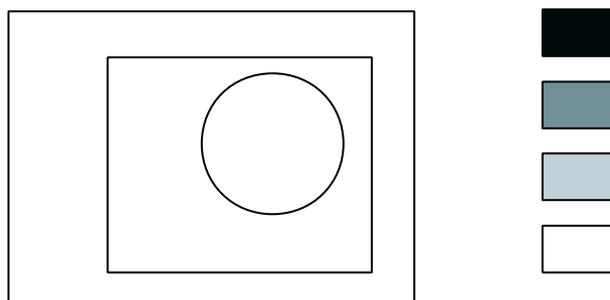
O Princípio Multiplicativo pode ser ilustrado com o auxílio de uma árvore de enumeração como a da figura a seguir.



(b) *Quantas são as possíveis bandeiras no caso em que 4 cores estão disponíveis?*

*Solução:* As decisões a serem tomadas são exatamente as mesmas do caso anterior, tendo mudado apenas o número de possibilidades de escolha. Para a cor externa, temos agora 4 possibilidades. Uma vez escolhida a cor externa, a cor do círculo pode ser qualquer uma das outras 3. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o número de modos diferentes para pintar a bandeira é  $4 \times 3 = 12$ .

**Exemplo 2.** Quantas são as formas de pintar a bandeira a seguir utilizando 3 cores diferentes dentre 4 dadas?



*Solução:* Agora, temos 3 decisões consecutivas a tomar: a cor externa, a do retângulo e a do círculo. A cor externa pode ser qualquer uma das 4 cores; uma vez escolhida a cor externa, o retângulo pode ser pintado de três modos distintos. Logo, a escolha combinada da cor externa e do retângulo pode ser feita de  $4 \times 3 = 12$  modos. Para cada um destes 12 modos, o círculo pode ser pintado com uma das duas cores que sobraram. Logo, o número total de possibilidades é  $4 \times 3 \times 2 = 24$ .

O raciocínio acima mostra que o Princípio Multiplicativo pode, na

realidade, ser aplicado quando temos diversas etapas de decisão: desde que o número de possibilidades em cada etapa não dependa das decisões anteriores, basta multiplicá-los para achar o número total de possibilidades.

**Exemplo 3.** Para pintar a bandeira abaixo, há 4 cores disponíveis. De quantos modos ela pode ser pintada de modo que faixas adjacentes tenham cores distintas?



*Solução:* O primeiro passo é escolher em que ordem vamos pintar a bandeira. Podemos, por exemplo, pintar as faixas de cima para baixo (veja, no exercício 16, o que ocorre quando escolhemos mal a ordem de preenchimento). A cor da primeira faixa pode ser qualquer uma das 4 cores. Qualquer que seja a cor escolhida, para a segunda faixa temos 3 cores para escolher. Escolhida a cor da segunda faixa, a terceira pode ser pintada de qualquer cor, exceto a usada para a segunda faixa. Assim, temos novamente 3 possibilidades de escolha.

O número total de possibilidades é, então:

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & \times & 3 & \times & 3 & = & 36 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1^{\text{a}} \text{ faixa} & & 2^{\text{a}} \text{ faixa} & & 3^{\text{a}} \text{ faixa} & & \end{array}$$

**Exemplo 4.** Quantos são os números de três algarismos distintos?

*Solução:* Vamos escolher, sucessivamente, os três algarismos, começando com o da esquerda (isto é importante, como veremos abaixo). O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual a 0. O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro algarismo. O terceiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos, pois não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo algarismo.

A resposta é  $9 \times 9 \times 8 = 648$ .

**Exemplo 5.** O código Morse usa duas letras, ponto e traço, e as palavras têm de 1 a 4 letras. Quantas são as palavras do código Morse?

*Solução:* Há palavras de 1, 2, 3 e 4 letras, em quantidades diferentes. Assim, nossa estratégia é a de usar o Princípio Multiplicativo para contar separadamente estas palavras e, depois, somar estas quantidades. Há 2 palavras de uma letra; há  $2 \times 2 = 4$  palavras de duas letras, pois há dois modos de escolher a primeira letra e dois modos de escolher a segunda letra; analogamente, há  $2 \times 2 \times 2 = 8$  palavras de três letras e  $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$  palavras de 4 letras. O número total de palavras é  $2 + 4 + 8 + 16 = 30$ .

Você já deve ter percebido nesses exemplos qual é a estratégia para resolver problemas de contagem:

**1. Postura:** Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar. Nas diversas situações dos Exemplos 1 a 3, nós nos colocamos no papel da pessoa que deveria colorir a bandeira; no Exemplo 4, colocamo-nos no papel da pessoa que deveria escrever o número.

**2. Divisão:** Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, correspondentes às diversas etapas do processo de decisão. Colorir a bandeira foi dividido em colorir cada região; formar um número de três algarismos foi dividido em escolher cada um dos três algarismos. Formar a palavra no código Morse foi dividido em escolher o número de letras e, a seguir, em escolher cada letra.

A ordem em que as decisões são tomadas pode ser extremamente importante para a simplicidade do processo de resolução. Vamos voltar ao Exemplo 4 (*Quantos são os números de três algarismos distintos?*) para ver como uma estratégia equivocada pode levar a uma solução desnecessariamente complicada.

Começando a escolha dos algarismos pelo último algarismo, há 10 modos de escolher o último algarismo. Em seguida, há 9 modos de escolher o algarismo central, pois não podemos repetir o algarismo já usado. Agora temos um impasse: de quantos modos podemos escolher o primeiro algarismo? A resposta é “depende”. Se não tivermos usado o 0, haverá 7 modos de escolher o primeiro algarismo, pois não poderemos usar nem o 0 nem os dois algarismos já usados nas demais casas; se já tivermos usado o 0, haverá 8 modos de escolher o primeiro algarismo.

Para evitar, na medida do possível, impasses como o acima, uma outra recomendação importante é:

**3. Não adiar dificuldades.** Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. No Exemplo 4, a escolha do primeiro algarismo era uma decisão mais restrita do que as outras, pois o primeiro algarismo não pode ser igual a 0. Essa é, portanto, a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar, e, conforme acabamos de ver, postergá-la só serve para causar problemas.

**Exemplo 6.** Quantos são os números pares de três algarismos distintos?

*Solução:* Há 5 modos de escolher o último algarismo. Note que começamos pelo último algarismo, que é o mais restrito; o último algarismo só pode ser 0, 2, 4, 6 ou 8.

Em seguida, vamos ao primeiro algarismo. De quantos modos se pode escolher o primeiro algarismo? A resposta é “depende”: se não tivermos usado o 0, haverá 8 modos de escolher o primeiro algarismo, pois não poderemos usar nem o 0 nem o algarismo já usado na última casa; se já tivermos usado o 0, haverá 9 modos de escolher o primeiro algarismo, pois apenas o 0 não poderá ser usado na primeira casa.

Assim, apesar de termos procurado atacar inicialmente a escolha mais restrita, chegamos a um impasse no uso do Princípio Multiplicativo. Esse tipo de impasse é comum na resolução de problemas e há dois métodos para vencê-lo.

O primeiro método consiste em voltar atrás e contar separadamente.

Contaremos separadamente os números que terminam em 0 e os que não terminam em 0. Começemos pelos que terminam em 0. Há 1 modo de escolher o último algarismo, 9 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o algarismo central. Há, portanto,  $1 \times 9 \times 8 = 72$  números de três algarismos distintos terminados em 0.

Para os que não terminam em 0, há 4 modos de escolher o último algarismo, 8 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o algarismo central. Há  $4 \times 8 \times 8 = 256$  números pares de três algarismos distintos que não terminam em 0.

A resposta é  $72 + 256 = 328$ .

O segundo método consiste em ignorar uma das restrições do problema, o que nos fará contar em demasia. Depois descontaremos o que houver sido contado indevidamente.

Primeiramente fazemos de conta que o 0 pode ser usado na primeira casa do número. Procedendo assim, há 5 modos de escolher o último algarismo (só pode ser 0, 2, 4, 6 ou 8), 9 modos de escolher o primeiro algarismo (não podemos repetir o algarismo usado na última casa – note que estamos permitindo o uso do 0 na primeira casa) e 8 modos de escolher o algarismo central. Há  $5 \times 9 \times 8 = 360$  números, aí inclusos os que começam por 0.

Agora vamos determinar quantos desses números começam por zero; são esses os números que foram contados indevidamente. Há 1 modo de escolher o primeiro algarismo (tem que ser 0), 4 modos de escolher o último (só pode ser 2, 4, 6 ou 8 – lembre-se de que os algarismos são distintos) e 8 modos de escolher o algarismo central (não podemos repetir os algarismos já usados). Há  $1 \times 4 \times 8 = 32$  números começados por 0.

A resposta é  $360 - 32 = 328$ .

**Exemplo 7.** De quantos modos diferentes 6 pessoas podem ser colocadas em fila?

*Solução:* Este é um problema clássico de contagem, chamado de *problema das permutações simples*, que é facilmente resolvido pelo Princípio Multiplicativo. De fato, basta escolher sucessivamente as pessoas colocadas em cada posição da fila. Para escolher o primeiro da fila, temos 6 possibilidades; o segundo pode ser qualquer uma das 5 pessoas restantes, e assim por diante. Logo, o número total de possibilidades é  $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ . De um modo geral, o número de modos de ordenar  $n$  objetos é igual a  $n \times (n - 1) \times \cdots \times 1$ , que é representado por  $n!$  (lê-se:  $n$  fatorial).

**Exemplo 8.** De quantos modos podem-se escolher três dos jogadores de um time de futebol para representá-lo em uma cerimônia de premiação?

*Solução:* Este é um outro problema clássico de contagem, chamado de *problema das combinações simples*. À primeira vista, parece ser simples resolvê-lo pelo Princípio Multiplicativo: basta escolher um representante de cada vez. O primeiro pode ser escolhido de 11 modos, o segundo, de 10 e o terceiro, de 9. Logo, o número total de possibilidades parece ser  $11 \times 10 \times 9 = 990$ . Esta solução está incorreta, mas podemos consertá-la para chegar à resposta certa. Suponha que tivéssemos escolhido, sucessivamente, os jogadores  $A$ ,  $B$  e  $C$ . A comissão de representantes assim formada seria exatamente a mesma se tivéssemos selecionado, por exemplo, primeiro  $B$ , depois  $A$ , depois  $C$ . No entanto, as duas escolhas foram contadas por nós como se fossem distintas. O que nos permite corrigir o resultado da contagem é o fato de que todas as possíveis comissões são repetidas o mesmo número de vezes, correspondente a todas as suas possíveis ordenações. Por exemplo,  $A$ ,  $B$  e  $C$  vão surgir, em nosso processo de enumeração,  $3 \times 2 \times 1 = 6$  vezes, o mesmo ocorrendo com todas as

possíveis comissões. Logo, o número correto de comissões é igual a  $990/6 = 165$ .

De modo geral, o número de modos de escolher  $p$  dentre  $n$  objetos é representado por  $C_n^p$  (lê-se: combinação de  $n$  tomados  $p$  a  $p$ ) e é igual a  $\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p(p-1)\cdots 1}$ .

## Exercícios

- 1) Um grupo de 4 alunos (Alice, Bernardo, Carolina e Daniel) tem que escolher um líder e um vice-líder para um debate.
  - (a) Faça uma lista de todas as possíveis escolhas (use a inicial de cada nome, para facilitar). Organize a sua lista do seguinte modo: primeiro, escreva todas as possibilidades em que Alice é a presidente, depois, aquelas em que Bernardo é presidente, e assim por diante.
  - (b) Conte o número de possíveis escolhas e verifique que o Princípio Multiplicativo fornece a mesma resposta.
- 2) Um restaurante possui um cardápio que apresenta escolhas de saladas (salada verde, salada russa ou salpicão), sopas (caldo verde, canja ou de legumes) e pratos principais (bife com fritas, peixe com puré, frango com legumes ou lasanha).
  - (a) De quantos modos se pode escolher um prato deste cardápio?
  - (b) De quantos modos se pode escolher uma refeição completa, formada por uma salada, uma sopa e um prato principal?
- 3) Quantos algarismos são escritos ao se escreverem os números inteiros de 1 a 100?