Gabarito

Questões 1 a 8, as resoluções estão na apostila 2 da OBMEP capítulo 3

Questão 9:

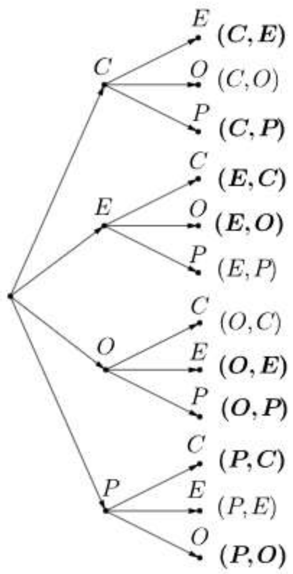
Só bala – A opção correta é (c).

A primeira bala pode ser de qualquer sabor. Para fixar as ideias, suponhamos que seja de banana. Depois que essa bala é retirada, sobram $1\,002 + 1\,001$ balas na caixa – no nosso caso, $1\,002$ de maçã e $1\,001$ de banana. A probabilidade q de que a segunda bala seja diferente (no nosso exemplo, de maçã) é $q = 1\,002/2\,003$. A probabilidade p de que a segunda bala seja igual (no nosso exemplo, de banana) é $p = 1\,001/2\,003$. A diferença $q - p$ é, portanto,

$$q - p = \frac{1\,002}{2\,003} - \frac{1\,001}{2\,003} = \frac{1}{2\,003}\,.$$

Questão 10:

(a) Representaremos copas, espadas, ouros e paus pelas letras C, E, O e P, respectivamente. A árvore de possibilidades é mostrada na figura a seguir:



(b) Usando a árvore de possibilidades, há 12 resultados possíveis e em 8 deles Manuel vence. Portanto, a probabilidade de Manuel vencer cada rodada é $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. O raciocínio de Jonatan não está correto, pois as possibilidades de cores não ocorrem com a mesma probabilidade.

Vale ressaltar que este item poderia ser respondido sem a árvore de possibilidades. Considere o momento após a virada da primeira carta. Entre as outras três, duas favorecem Manuel, pois possuem a cor diferente da cor da carta que foi virada. Então, assim como na conclusão usando a árvore, a probabilidade de Manuel vencer é $\frac{2}{3}$.

Questão 11:

Solução. Afirmar que o sorteio é realizado sem repetição quer dizer que, uma vez que uma etiqueta seja retirada da urna, ela não é recolocada lá dentro. Desse modo, as três etiquetas sorteadas são distintas. Assim, o resultado do sorteio é um conjunto de três etiquetas, e o conjunto de possíveis resultados forma o nosso espaço amostral. Além disso, para responder à questão, a ordem em que as etiquetas foram retiradas não é importante. Portanto, o número total de casos possíveis é igual a $\binom{n}{3}$. Veja, ainda, que cada um desses casos é equiprovável, uma vez que a chance de se retirar qualquer uma das etiquetas da urna é a mesma.

Dentre o total de conjuntos possíveis, devemos, agora, contar a quantidade daqueles que têm seus três elementos consecutivos. Veja que, uma vez escolhido o menor elemento do conjunto, os outros dois estão automaticamente determinados; além disso, o menor elemento deve pertencer ao conjunto $\{1, 2, \ldots, n-2\}$. Em verdade, podemos até listar todos os subconjuntos com 3 elementos consecutivos: $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$, ..., $\{n-2, n-1, n\}$.

Logo, há $n-2$ casos favoráveis, e a probabilidade desejada é igual a

$$\frac{n-2}{\binom{n}{3}} = \frac{n-2}{n(n-1)(n-2)} \cdot 3! = \frac{6}{n(n-1)}.$$