1

Analise Combinatória

1.1 Princípio Aditivo

Exemplo 1.1

Paulo chegou a uma lanchonete e encontrou as seguintes opções de bebidas disponíveis:

- 4 opções de refrigerante: R_1, R_2, R_3 e R_4;
- 3 opções de suco: S_1, S_2 e S_3;
- 2 marcas de água mineral: A_1 e A_2.

De quantas maneiras ele pode escolher uma bebiba?
Para isso, ele tem três **hipóteses**: refrigerante, suco ou água. Para cada uma dessas hipóteses ele tem um certo número de **opções**.

Hipóteses	$\rightarrow$	Refrigerante	**ou**	Suco	**ou**	Água
Opções	$\rightarrow$	$R_1R_2R_3R_4$		$S_1S_2S_3$		A_1A_2
		4		3		2

Portanto, ele tem 9 formas $(R_1, R_2, R_3, R_4, S_1, S_2, S_3, A_1, A_2)$ diferentes de escolher uma bebida.
Esse problema ilustra o **princípio aditivo de contagem** e estende-se para qualquer quantidade de hipóteses.

1.2 Princípio Fundamental da Contagem

Exemplo 1.2

Ao abrir um armário, Flávia encontrou:

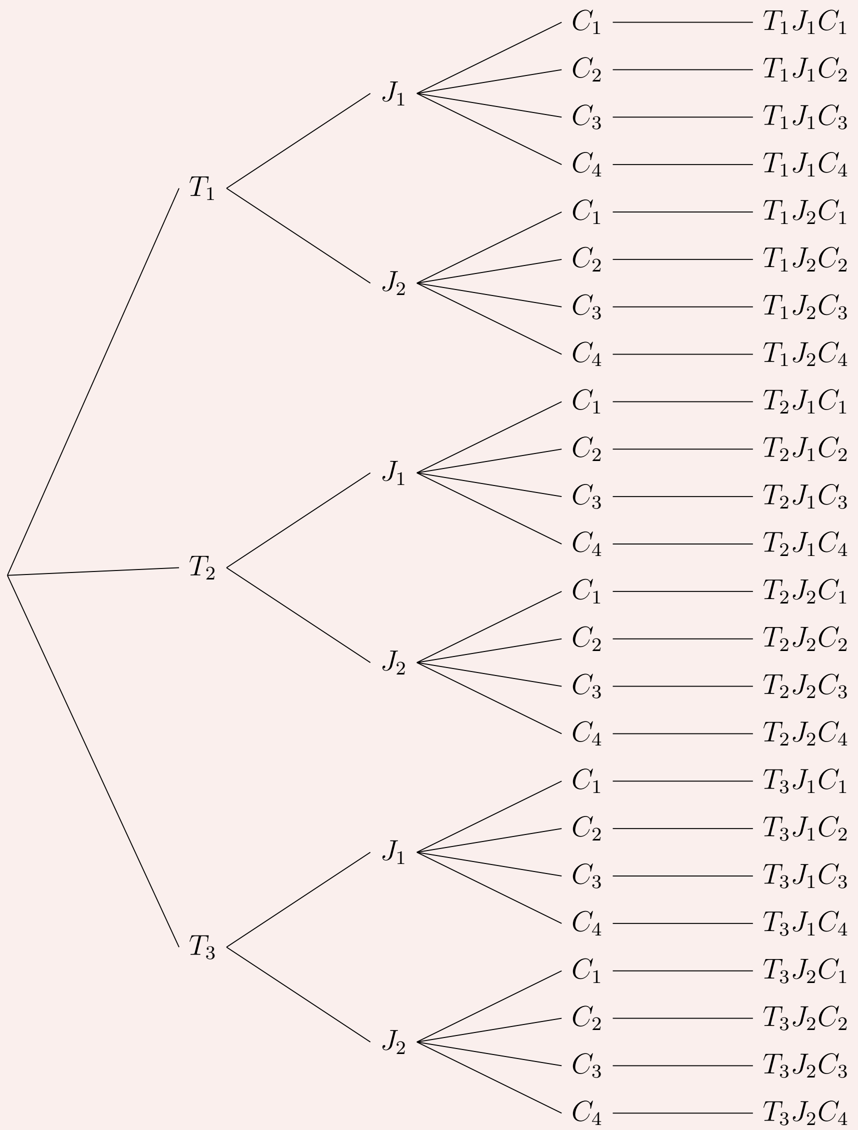
- 3 pares de tênis: T_1, T_2 e T_3;

- 2 calças jeans: J_1 e J_2;
- 4 camisetas: C_1, C_2, C_3 e C_4.

De quantas formas diferentes ela pode escolher um conjunto tênis-jeans-camiseta para ir ao shopping?
Agora, sua escolha é feita em três etapas independentes: escolha do tênis, escolha do jeans e escolha da camiseta. Para cada uma dessas etapas, ela tem um certo número de opções.

Etapas	$\rightarrow$	Tênis	**e**	Jeans	**e**	Camiseta
Opções	$\rightarrow$	$T_1T_2T_3$		J_1J_2		$C_1C_2C_3C_4$
		3		2		4

O caso de Flávia envolve três **etapas** independentes. Para cada opção de tênis que venha a escolher, ela tem 2 opções para escolha do jeans. Para cada conjunto tênis-jeans que tenha esscolhido, ela tem 4 opções para escolha da camiseta.
Todos os possíveis resultados do problema de Flávia podem ser visualizados no esquema a seguir, chamado **árvore das possibilidades**.



Observe que há 24 resultados possíveis. Portanto, há 24 formas diferentes de Flávia escolher um conjunto tênis-jeans-camiseta. Pela análise da árvore, podemos observar que este valor é obtido por meio uma multiplicação: $3 \times 2 \times 4 = 24$.

Esse exemplo ilustra o **princípio fundamental da contagem**, também conhecido como **princípio multiplicativo da contagem**, e estende-se para qualquer quantidade de etapas. De forma geral, podemos enunciá-lo assim:

Se um acontecimento ocorre em duas etapas sucessivas e independentes, sendo que a primeira 1ª situação ocorre de a maneiras e a 2ª situação de b maneiras, então o número total de possibilidades de ocorrência desse acontecimento é dado pelo produto $a.b$.

Exercício 1.1

Um homem vai a um restaurante disposto a comer um só prato de carne e uma só sobremesa. O cardápio oferece oito pratos distintos de carne e cinco pratos diferentes de sobremesa. De quantas formas pode o homem fazer sua refeição?

Exercício 1.2

Uma moça possui 5 blusas e 6 saias. De quantas formas ela pode vestir uma blusa e uma saia?

Exercício 1.3

Uma igreja tem 4 portas. Quando vai lá, Marisa sempre entra por uma porta e sai por outra. De quantas formas diferentes ela pode fazer isso?

Exercício 1.4

Utilizando os algarismos 1, 2, 4, 5, 7 e 9, quantos números naturais maiores que 7000 e de 4 algarismos distintos podemos formar?

Exercício 1.5

Uma fábrica produz 3 modelos de automóveis, com 5 opções de cores. Cada um deles está disponível em 2 versões: duas portas e quatro portas. Quantas alternativas diferentes tem um comprador para adquirir um automóvel, levando-se em conta essas três variáveis?

Exercício 1.6

Normalmente, o uniforme de um clube de futebol é constituído por uma camisa, um calção e um par de meias. Um clube tem 3 opções de camisa, 2 de calções e 2 de meias. Quantas partidas ele pode jogar, no máximo, sem repetir o uniforme?

Exercício 1.7

Numa lanchonete, há 5 tipos de salgado, 3 tipos de sanduíche, 2 tipos de suco e 4 marcas de refrigerante. De quantas formas diferentes um cliente pode escolher:

a) um comestível?

b) uma bebiba?

c) um salgado e um refrigerante?

d) um sanduíche e uma bebida?

e) um comestível e uma bebida?

Exercício 1.8

Numa prova de matemática, foram dadas 8 sentenças. Em cada uma delas, o aluno deveria marcar uma das letras: V (verdadeira) ou F (falsa). De quantas maneiras diferentes as 8 marcações podem ser feitas?

Exercício 1.9

Utilizando-se só os algarismos 1, 2, 4, 6 e 8, formam-se todos os números de 4 algarismos.

a) Qual é o total de números formados?

b) Quantos não tem algarismo repetido?

c) Quantos têm pelo menos um algarismo repetido?

d) Quantos são pares?

e) Quantos são maiores que 6000 e não têm algarismo repetido?

Exercício 1.10

No sistema de emplacamento de veículos, usam-se letras e algarismos. Um exemplo é a placa $PMG - 0358$. As 3 letras são escolhidas entre as 26 do alfabeto; os algarismos são escolhidos entre os 10 disponíveis. Suponha que haja placas com quatro zeros (0000).

a) Quantas placas diferentes podem ser feitas?

b) Quantas têm as 3 letras e os 4 algarismos diferentes?

c) Quantas só têm vogais e algarismos maiores que 6?

d) Quantas têm 3 vogais diferentes e o primeiro e o último algarismo iguais?

Exercício 1.11

Chama-se **anagrama** de uma palavra, toda palavra (com ou sem significado) obtida, trocando-se suas letras de posição. Veja, por exemplo, alguns anagramas da palavra AMOR:

AMOR, OMAR, MORA, MARO

Formam-se todos os anagramas da palavra CARINHO.

a) Qual é o total de anagramas?

b) Quantos começam por vogal?

c) Quantos terminam em CA, nesta ordem?

d) Quantos têm o C e o A juntos, nesta ordem?

Exercício 1.12

Considere a palavra DILEMA e determine:

a) o número total de anagramas;

b) o número de anagramas que começam pela letra D;

c) o número de anagramas que começam pela letra D e terminam com a letra A;

d) o número de anagramas que começam com vogal.

Exercício 1.13

Da palavra LIVRO:

a) quantos anagramas podemos formar?

b) quantos são os anagramas que começam por vogal?

c) quantos são os anagramas que começam por consoante?

Exercício 1.14

Da palavra ADESIVO:

a) quantos anagramas podemos formar com as letras SI juntas e nessa ordem?

b) quantos anagramas começam com a letra D e terminam com a letra V?

Exercício 1.15

Obter o número de anagramas formados com as letras da palavra REPÚBLICA, nos quais as vogais se mantêm nas respectivas posições.

OBMEP 1.1

[(OBMEP 2015)] Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pôde receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois deles foram premiados. De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?

a) 20 b) 30 c) 60 d) 90 e) 120

1.3 Fatorial

Definição

Na matemática, o **fatorial** de um número natural n, representado por $n!$, é o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n. Exemplos:

- $3! = 3.2.1 = 6$
- $4! = 4.3.2.1 = 24$
- $5! = 5.4.3.2.1 = 120$

De uma forma geral podemos escrever:

$$n! = n.(n-1).(n-2)\ldots 3.2.1$$

Por convenção, adotamos $0! = 1$.

Exercício 1.16

Calcule o valor dos números fatoriais:

a) $6!$ b) $7!$ c) $2! + 3!$ d) $1! + 4!$ e) $3! - 2!$ f) $0! + 1!$ g) $2!3!$ h) $0!5!$ i) $4!2!$ j) $1!7!$

Exercício 1.17

Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{8!}{9!}$ b) $\dfrac{15!}{13!}$ c) $\dfrac{4!}{6!}$ d) $\dfrac{6!}{5!2!}$ e) $\dfrac{8!}{4!6!}$ f) $\dfrac{2.4!}{4!4!}$

Exercício 1.18

Simplifique as frações:

a) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$ b) $\dfrac{x!}{(x-2)!}$ c) $\dfrac{(n+1)!}{n!}$ d) $\dfrac{(2x+2)!}{(2x)!}$ e) $\dfrac{x!(x+2)!}{(x-1)!(x+1)!}$ f) $\dfrac{(n-1)!+(n-2)!}{n!}$

Exercício 1.19

Resolva as equações:

a) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 12$

b) $\dfrac{n!}{(n-2)!} = 20$

c) $\dfrac{(n-1)!(n+2)!}{n!(n+1)!} = 2$

Exercício 1.20

A solução da equação $\dfrac{(n+2)!(n-2)!}{(n+1)!(n-1)!} = 4$ é um número natural:

a) par.

b) cubo perfeito.

c) maior que 10.

d) divisível por 5.

e) múltiplo de 3.

Exercício 1.21

Se $(x+1)! = 3(x!)$, então x é igual a:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5