Avaliação Presencial – Ciclo 3 – 11º PIC – N1

Professores,

Esta avaliação presencial é constituída de três questões e tem pontuação total máxima de 10 pontos, distribuídos do seguinte modo:

Questão 1 – três pontos
Questão 2 – três pontos
Questão 3 – quatro pontos

Reproduza as questões em uma folha para ser distribuída para os alunos medalhistas e os alunos convidados e corrija cada questão de acordo com o critério de correção apresentado. Caso algum aluno apresente uma solução que não esteja contemplada no critério de pontuação sugerido, procure estabelecer alguma coerência com as sugestões de pontuações apresentadas.

Qualquer dúvida, escreva na sala dos POs no Fórum Hotel de Hilbert.

Agradecemos quaisquer comentários e observações sobre as questões, as soluções e os critérios de pontuação definidos.

Um grande abraço

Coordenadores de Fórum.

Questão 1:

(a) Observando que $45 = 5 \times 9$ estabeleça um critério para saber quando um número natural é divisível por 45.

(b) Mariana pensou em um número com cinco algarismos, e escreveu este número em uma folha de papel trocando o algarismo da unidade de milhar por uma letra **a** e trocando o algarismo da unidade por uma letra **b**, escrevendo o número assim:

$$7a86b$$

Sabendo que Mariana pensou em um número que é divisível por 45, utilizando o item (a), determine quais são os números que Mariana pode ter pensado.

Solução:

Primeiramente observe que esta questão é muito parecida com o exercício 44 da página 59 da apostila Encontros de Aritmética.

(a) Para um número ser divisível por $45 = 5 \times 9$ ele deve ser obrigatoriamente divisível por 5 e por 9, simultaneamente. Para ser divisível por 5 ele deve terminar com o algarismo 0 ou com o algarismo 5. E para ser divisível por 9, a soma dos seus algarismos deve ser um múltiplo de 9.

(b) Pelo que foi afirmado no item (a), o número pensado por Mariana deve ser divisível por 5 e por 9 ao mesmo tempo. Para o número 7a86b ser divisível por 5, devemos ter b=0 ou b=5.

Para cada uma destas possibilidades, vamos analisar a restrição sobre o algarismo a para que o número 7a86b seja divisível por 9.

Se b=0, o número de Mariana tem a forma 7a860. A soma dos algarismos 7+a+8+6+0=21+a deve ser um múltiplo de 9. A única possibilidade é 21+a=27 e portanto a=6. Neste caso o número de Mariana é 76860.

Se b=5, o número de Mariana tem a forma 7a865. A soma dos algarismos 7+a+8+6+5=26+a deve ser um múltiplo de 9. A única possibilidade é 26+a=27 e portanto a=1. Neste caso o número de Mariana é 71865.

Portanto Mariana somente pode ter pensado nos números 76860 ou 71865.

Critérios de pontuação da questão 1.
Esta questão vale 3 pontos, distribuídos do seguinte modo.

- O item (a) vale 1 ponto e o item (b) vale 2 pontos.
- No item (b) atribuir 1 ponto se o aluno concluiu que b=0 ou b=5.
- No item (b) atribuir 1 ponto se o aluno concluiu que para b=0, a=6 e para o caso b=5, a=1. Obtendo as respostas corretas 76860 e 71865.

Questão 2: Quantos são os números naturais com quatro algarismos? Em quantos desses números o algarismo 8 aparece pelo menos uma vez?

Observação: Quando escrevemos um número natural, não consideramos o algarismo 0 a esquerda do número. Por exemplo, o número 0598 não tem quatro algarismos, pois ele é o número 598 que tem exatamente três algarismos.

Solução:

(a) [primeira solução] O conjunto dos números naturais com quatro algarismos é $\{1000, 1001, \ldots, 9999\}$. Como aprendemos no exercício 24 da página 15 da apostila Encontros de Aritmética, a quantidade de elementos neste conjunto é igual a 9999-1000+1=9000.

(a) [segunda solução] Vamos utilizar o princípio multiplicativo para contar quantos são os números abcd de quatro algarismos.

- O algarismo a pode ser escolhido de 9 maneiras, pois devemos apenas evitar a escolha do algarismo 0.
- Para os algarismos b, c, d não existe restrição alguma: cada um deles pode ser escolhido entre os 10 algarismos.

Aplicando o princípio multiplicativo, existem $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$ números naturais com quatro algarismos.

(b) Vamos subtrair da quantidade total de números naturais com quatro números a quantidade de números naturais com quatro algarismos em que o algarismo 8 não aparece.

Então vamos contar quantos são os números naturais abcd de quatro algarismos em que o algarismos 8 não aparece. Novamente vamos utilizar o princípio multiplicativo.

- O algarismo a pode ser escolhido de 8 maneiras, pois não podemos escolher o algarismo 0 e também não podemos escolher o algarismo 8.
- Cada um dos outros algarismos b, c, d pode ser escolhido de 9 maneiras, pois apenas não podemos escolher o algarismo 8.

Pelo princípio multiplicativo concluímos que existem $8 \times 9 \times 9 \times 9 = 5832$ números naturais com quatro algarismos, sendo cada um desses algarismos diferente de 8.

Portanto vemos que existem 9000-5832=3168 números naturais com quatro algarismos de modo que pelo menos um destes algarismos seja igual a 8.

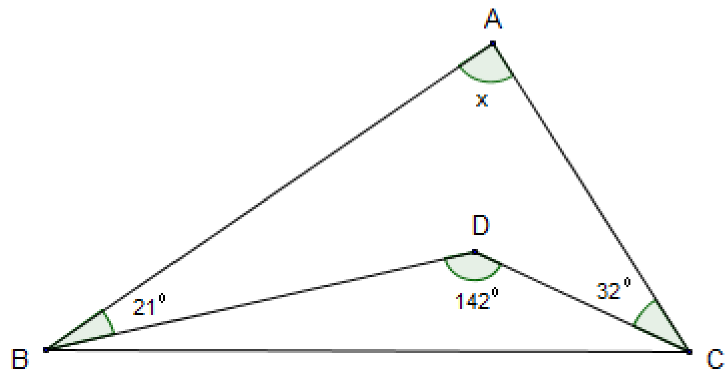
Critério de pontuação da questão 2.
Esta questão vale 3 pontos, distribuídos do seguinte modo.

- Atribuir 1 ponto se o aluno calculou corretamente a quantidade 9000 de números naturais com quatro algarismos.

- Atribuir 1 ponto se o aluno calculou corretamente a quantidade 5832 de números naturais com quatro algarismos, todos diferentes do 8.

- Atribuir 1 ponto se o aluno calculou corretamente a diferença 9000-5832=3168 e interpretou corretamente este número como a quantidade de números naturais com quatro algarismos, sendo que pelo menos um dos algarismos é igual a 8.

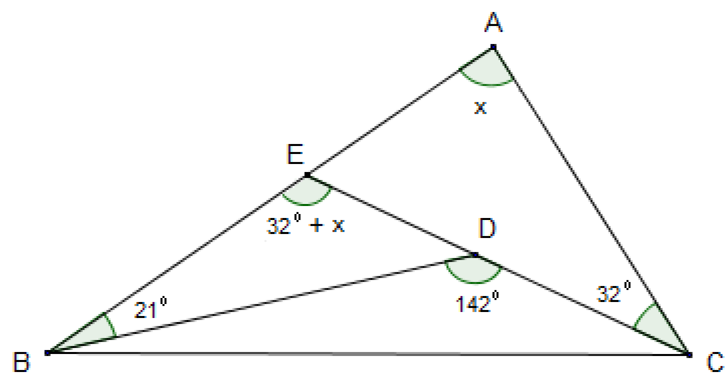
Questão 3: Na figura a seguir o ponto D está no interior do triângulo ABC. Utilizando os valores dos ângulos dados na figura, $A\hat{B}D = 21^o$, $A\hat{C}D = 32^o$ e $B\hat{D}C = 142^o$, determine o valor do ângulo $x = B\hat{A}C$.



Solução:

Observe primeiramente que esta questão é muito similar com o exercício 11 da página 33 da apostila Encontros de Geometria.

Prolongue o segmento CD até ele encontrar o segmento AB em um ponto E. Observe que o ângulo $B\hat{E}D$ é ângulo externo do triângulo EAC não adjacente aos ângulos internos x e 32^o. Daí $B\hat{E}D = 32^o + x$.



Agora observe que o ângulo $B\hat{D}C$ é ângulo externo do triângulo BED não adjacente aos ângulos internos $32^o + x$ e 21^o. Daí $B\hat{D}C = (32^o + x) + 21^o$.

Como $B\hat{D}C = 142^o$ obtemos $(32^o + x) + 21^o = 142^o$.

Resolvendo esta equação obtemos $x = 89^o$.

Critério de pontuação da questão 3.
Esta questão vale 4 pontos, distribuídos do seguinte modo.

Provavelmente o aluno dividirá o quadrilátero ABDC em dois triângulos, prolongando o segmento CD ou prolongando o segmento BD. Atribuir 1 ponto se o aluno tiver esta iniciativa: dividir o quadrilátero ABDC em dois triângulos.

Em cada um dos dois triângulos em que foi dividido o quadrilátero ABDC o aluno deverá utilizar o teorema do ângulo externo ou o valor da soma dos ângulos internos desse triângulo. Atribuir 1 ponto para cada vez que o aluno utilizar um desses resultados.

Atribuir mais 1 ponto para a obtenção da resposta final.