Ciclo 5 – Encontro 2

PERMUTAÇÕES DE ELEMENTOS NEM TODOS DISTINTOS E PERMUTAÇÕES CIRCULARES

Nível 3
PO: Márcio Reis
11° Programa de Iniciação Científica Jr.

Permutações de elementos nem todos distintos e permutações circulares

- Apostila 2: “Métodos de Contagem e Probabilidade” de Paulo Cezar Pinto Carvalho.

  Seção 4: Mais Permutações e Combinações

Permutações de elementos nem todos distintos e permutações circulares

Como vimos anteriormente, é possível resolver um grande número de problemas interessantes de contagem sem utilizar fórmulas, apenas empregando apropriadamente as quatro operações. Há, no entanto, certos problemas que ocorrem com frequência e que não são imediatos, como o problema das combinações simples, para os quais é interessante conhecer a fórmula que expressa sua solução, para empregá-la em outros problemas. Neste material adicional, veremos alguns problemas que utilizam permutações e combinações em sua solução e travaremos contato com algumas outras fórmulas combinatórias que podem ser úteis.

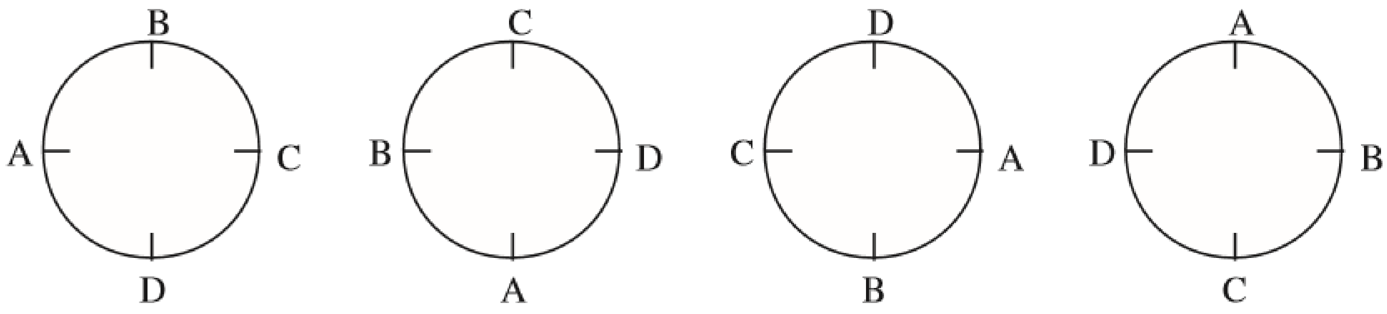
Permutações de elementos nem todos distintos e permutações circulares

Exemplo 1. De quantos modos 4 crianças podem formar uma roda?

Permutações de elementos nem todos distintos e permutações circulares

Exemplo 1. De quantos modos 4 crianças podem formar uma roda?

Solução: À primeira vista, pode parecer que para formar uma roda com as 4 crianças basta escolher uma ordem para elas, o que pode ser feito de $4! = 24$ modos. Entretanto, as rodas ABCD, BCDA, CDAB e DABC mostradas na figura abaixo são iguais, já que cada uma resulta da anterior por uma "virada" de $1/4$ de volta.



Permutações de elementos nem todos distintos e permutações circulares

Para calcular o número de maneiras possíveis de formar uma roda, podemos raciocinar de dois modos diferentes. Um deles consiste em partir do resultado anterior ($4! = 24$) e perceber que cada roda está sendo contada 4 vezes. Logo, o número correto de rodas que podem ser formadas é $\frac{24}{4} = 6$. Alternativamente, podemos começar por fixar a criança A na posição à esquerda (já que em qualquer roda A pode ficar nesta posição). Agora, temos 3 lugares para as 3 crianças que restaram, para um total de $3! = 6$ possibilidades.

De modo geral, o número de modos de colocar n objetos em círculo, considerando-se iguais disposições que coincidam por rotação (ou seja, o número de *permutações circulares* de n objetos) é $PC_n = (n-1)!$.

Permutações de elementos nem todos distintos e permutações circulares

Exemplo 2. Considere um grupo formado por 7 homens (entre os quais José) e 5 mulheres (entre as quais Maria), do qual se quer extrair uma comissão constituída por 4 pessoas. Quantas são as comissões:

(a) Possíveis?

(b) Formadas por 2 homens e 2 mulheres?

(c) Em que haja pelo menos 2 mulheres?

(d) Em que José participe, mas Maria não?

(e) Formadas por 2 homens, entre os quais José, e 2 mulheres, mas sem incluir Maria?

Permutações de elementos nem todos distintos e permutações circulares

Exemplo 2. Considere um grupo formado por 7 homens (entre os quais José) e 5 mulheres (entre as quais Maria), do qual se quer extrair uma comissão constituída por 4 pessoas. Quantas são as comissões:

(a) Possíveis?

Solução: Devemos escolher 4 das 12 pessoas, o que pode ser feito de C_{12}^{4} modos, que é igual a $\frac{12\times11\times10\times9}{1\times2\times3\times4} = 495$ comissões.

Permutações de elementos nem todos distintos e permutações circulares

Exemplo 2. Considere um grupo formado por 7 homens (entre os quais José) e 5 mulheres (entre as quais Maria), do qual se quer extrair uma comissão constituída por 4 pessoas. Quantas são as comissões:

(b) Formadas por 2 homens e 2 mulheres?

Solução: Para formar uma comissão, devemos escolher os 2 homens, o que pode ser feito de C_7^2 modos, e, a seguir, as 2 mulheres, o que pode ser feito de C_5^2 maneiras. O número total de possibilidades de escolha, pelo princípio multiplicativo, é $C_7^2 \times C_5^2 = 21 \times 10 = 210$ comissões.

Permutações de elementos nem todos distintos e permutações circulares

Exemplo 2. Considere um grupo formado por 7 homens (entre os quais José) e 5 mulheres (entre as quais Maria), do qual se quer extrair uma comissão constituída por 4 pessoas. Quantas são as comissões:

(c) Em que haja pelo menos 2 mulheres?

Solução: Há 3 tipos de comissão possíveis: com 2 homens e 2 mulheres, com 1 homem e 2 mulheres e com 4 mulheres. Para obter o número total de comissões, contamos separadamente as comissões de cada tipo e somamos os resultados, obtendo

$$C_7^2 \times C_5^2 + C_7^1 \times C_5^3 + C_5^4 = 210 + 70 + 5 = 285 \quad \text{comissões.}$$

Permutações de elementos nem todos distintos e permutações circulares

Exemplo 2. Considere um grupo formado por 7 homens (entre os quais José) e 5 mulheres (entre as quais Maria), do qual se quer extrair uma comissão constituída por 4 pessoas. Quantas são as comissões:

Uma tentativa de contagem que leva a um erro muito comum é a seguinte: como a comissão deve ter pelo menos 2 mulheres, inicialmente escolhemos 2 mulheres, o que podemos fazer de $C_5^2 = 10$ modos. A seguir, basta escolher 2 pessoas quaisquer entre as 10 que sobraram, o que pode ser feito de $C_{10}^2 = 45$ modos. Logo, por este raciocínio, teríamos $10 \times 45 = 450$, que difere do resultado (correto) encontrado acima. Essa solução, portanto, está **errada**. Você sabe explicar onde está o erro no raciocínio?

Permutações de elementos nem todos distintos e permutações circulares

Exemplo 2. Considere um grupo formado por 7 homens (entre os quais José) e 5 mulheres (entre as quais Maria), do qual se quer extrair uma comissão constituída por 4 pessoas. Quantas são as comissões:

(d) Em que José participe, mas Maria não?

Solução: Como José deve participar da comissão, resta escolher apenas 3 outras pessoas, entre as 10 restantes (já que José já foi escolhido e Maria não pode ser escolhida). Logo, o número de possibilidades é igual a $C_{10}^{3} = 120$.

Permutações de elementos nem todos distintos e permutações circulares

Exemplo 2. Considere um grupo formado por 7 homens (entre os quais José) e 5 mulheres (entre as quais Maria), do qual se quer extrair uma comissão constituída por 4 pessoas. Quantas são as comissões:

(e) Formadas por 2 homens, entre os quais José, e 2 mulheres, mas sem incluir Maria?

Solução: Temos que escolher 1 homem entre 6 (José já está escolhido) e 2 mulheres entre 4 (Maria não pode ser escolhida). O número de comissões é $6 \times C_4^2 = 6 \times 6 = 36$.

Permutações de elementos nem todos distintos e permutações circulares

Exemplo 3. Quantos anagramas podemos formar com a palavra MATEMATICA?

Permutações de elementos nem todos distintos e permutações circulares

Exemplo 3. Quantos anagramas podemos formar com a palavra MATEMATICA?

Solução: Um anagrama é uma palavra (não necessariamente fazendo sentido) formada com as mesmas letras, mas em uma ordem qualquer. Quando as n letras de uma palavra são todas distintas, o número de anagramas é igual ao número de permutações de n, que, como vimos, é igual a $n!$. Mas a palavra MATEMATICA tem letras repetidas: há 3 A, 2 M e 2 T, além de E, I e C, que aparecem uma vez cada.

Permutações de elementos nem todos distintos e permutações circulares

Exemplo 3. Quantos anagramas podemos formar com a palavra MATEMATICA?

Uma solução (consistente com o princípio de atacar o mais complicado antes) é, antes de mais nada, decidir o que fazemos com as letras repetidas. Para colocar os A, temos que escolher 3 dentre os 10 lugares possíveis, o que pode ser feito de C_{10}^{3} modos. Para colocar os M, restam agora 7 lugares, dos quais devemos escolher 2, o que pode ser feito de C_7^2 maneiras. Agora só restam 5 lugares, dos quais devemos escolher 2 para colocar os T; temos C_5^2 possibilidades. Agora, só restam 3 lugares, nos quais devem ser colocadas as 3 letras restantes, o que pode ser feito de $3 \times 2 \times 1$ modos. Logo, o número total de anagramas é $C_{10}^{3} C_7^2 C_5^2 \times 6 = 151\,200$.

Permutações de elementos nem todos distintos e permutações circulares

Mas há um outro modo de pensar, partindo do número de permutações de 10 letras distintas (igual a 10!). Esta contagem não está correta, porque consideramos letras iguais como se fossem distintas. Ou seja, é como se considerássemos as permutações de $A_1, A_2, A_3, M_1, M_2, T_1, T_2, E, I$ e C. Para corrigir a contagem, basta contar quantas vezes cada anagrama foi contado. Por exemplo, o anagrama $AAAMMTTEIC$ foi contado várias vezes: um como $A_1A_2A_3M_1M_2T_1T_2EIC$, outro como $A_2A_1A_3M_1M_2T_1T_2EIC$ etc. Na verdade, ele foi contado tantas vezes como os modos de ordenar os 3 A, os 2 M e os 2 T, que é igual a $3! \times 2! \times 2!$. O número de anagramas é, então, $\frac{10!}{3!2!2!} = 151\,200$, como encontrado anteriormente.

Permutações de elementos nem todos distintos e permutações circulares

O segundo raciocínio pode ser facilmente estendido para uma situação geral. O número de permutações de n objetos nem todos distintos, em que um deles aparece n_1 vezes, outro n_2 vezes, e assim por diante, é $P_n^{n_1,n_2,\ldots} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots}$.

Permutações de elementos nem todos distintos e permutações circulares

Exemplo 4. De quantos modos 6 pessoas (João, Maria, Pedro, Janete, Paulo e Alice) podem ser divididas em 3 duplas?

Permutações de elementos nem todos distintos e permutações circulares

Solução: O problema é mais sutil do que parece a princípio. À primeira vista, pode parecer que a situação é a mesma do problema anterior. Uma maneira de dividir as 6 pessoas em duplas é colocar as pessoas em fila e formar uma permutação de AABBCC. Como visto no exemplo anterior, isto pode ser feito de $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$ modos. Mas isto não está correto, pois atribuiu nomes específicos (A, B e C) às duplas formadas. Note que colocar João e Maria na dupla A e Pedro e Janete na dupla B é equivalente a colocar João e Maria na dupla B e Pedro e Janete na dupla A. Portanto, uma mesma distribuição em duplas está sendo contada várias vezes. Mais precisamente, cada distribuição em duplas está sendo contada tantas vezes quanto o número de modos de ordenar A, B e C, ou seja, $3! = 6$ vezes. Logo, o número de possíveis distribuições em duplas é $\frac{90}{6} = 15$.

Exercício 1

De quantas maneiras 13 pessoas podem ser distribuídas em 3 quartos A, B e C de um hotel, de modo que 5 pessoas fiquem em A, 2 em B e 6 em C?

Exercício 1 - Solução

De quantas maneiras 13 pessoas podem ser distribuídas em 3 quartos A, B e C de um hotel, de modo que 5 pessoas fiquem em A, 2 em B e 6 em C?

Solução:

Ordenemos as pessoas em fila, em ordem de idade por exemplo. Associemos a cada pessoa o quarto em que ela vai ficar. Desta forma, cada distribuição das 13 pessoas pelos 3 quartos, conforme o enunciado, corresponde de maneira única a exatamente uma sequência de 13 letras, sendo 5 letras iguais a A, 2 iguais a B e 6 iguais a C. O número de tais sequências é igual $P_{13}^{5,2,6} = \frac{13!}{5!2!6!} = 36036$.

Exercício 2

Um cubo $5 \times 5 \times 5$ é formado por pequenos cubos unitários. Um gafanhoto está no centro O de um dos cubos de canto. Em qualquer instante, ele pode pular para o centro de qualquer cubo que tenha uma face em comum com o cubo onde ele está, desde que este pulo aumente a distância entre o ponto O e a posição atual do gafanhoto. De quantas maneiras o gafanhoto pode chegar ao cubo unitário no canto oposto?

Exercício 2 - Solução

Um cubo $5 \times 5 \times 5$ é formado por pequenos cubos unitários. Um gafanhoto está no centro O de um dos cubos de canto. Em qualquer instante, ele pode pular para o centro de qualquer cubo que tenha uma face em comum com o cubo onde ele está, desde que este pulo aumente a distância entre o ponto O e a posição atual do gafanhoto. De quantas maneiras o gafanhoto pode chegar ao cubo unitário no canto oposto?

Solução:

Para chegar ao cubo unitário no canto oposto o gafanhoto tem que dar 12 pulos, sendo 4 em cada uma das 3 direções. Denotando os pulos na primeira direção por A, os pulos na segunda direção por B e os pulos na terceira direção por C, então cada caminho percorrido pelo gafanhoto pode ser interpretado, de maneira única, como uma sequência de 12 letras A, B e C, sendo que cada uma das letras A, B e C deve aparecer exatamente 4 vezes na sequência. O número de tais sequências é igual a $P_{12}^{4,4,4} = \frac{12!}{4!4!4!} = 34650$.

Exercício 3

Se 4 meninos e 4 meninas vão brincar de roda, de quantas maneiras poderão dar as mãos, de modo que pelo menos 2 meninas estejam juntas?

Exercício 3 – Solução

Se 4 meninos e 4 meninas vão brincar de roda, de quantas maneiras poderão dar as mãos, de modo que pelo menos 2 meninas estejam juntas?

Solução:

O número de maneiras de dispor as 8 crianças na roda é igual a $PC_8 = 7! = 5040$. Vamos calcular o número de maneiras de dispor as crianças na roda de modo que não estejam 2 meninas juntas. Para tal, primeiro dispomos as 4 meninas na roda, o que pode ser feito de $PC_4 = 3! = 6$ maneiras. Uma vez dispostas as meninas na roda, deve-se dispor cada um dos 4 meninos entre cada par de meninas (de modo que nunca duas meninas fiquem juntas), o que pode feito de $4! = 24$ maneiras. Assim, o número de maneiras de dispor as crianças na roda de modo que não estejam 2 meninas juntas é igual a $6 \cdot 24 = 144$ maneiras. Assim, O número de maneiras de dispor as 8 crianças na roda, de modo que pelo menos 2 meninas estejam juntas, é igual a $5040 - 144 = 4896$.

Estudar para o próximo encontro!

Próximo encontro: 12/11, sábado, às 08h

Vídeoaulas do Portal da Matemática:
Módulo: “Construções geométricas com régua e compasso”
http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=67
Vídeoaulas:
Aula 2 - Construções geométricas elementares 2
Aula 3 - Circunferência circunscrita a um triângulo
Aula 4 - Cincunferência inscrita a um triângulo
Aula 5 - Arco capaz
Aula 8 - Reta tangente a uma circunferência
Aula 9 - Traçando uma corda
Aula 10 - Desenhando um triângulo 1
Aula 11 - Desenhando um triângulo 2