Combinação Simples

Uma combinação (simples) de n elementos (distintos), tomados r a r, é qualquer escolha de r elementos dentre os n elementos dados. Em uma combinação, apenas o conjunto dos elementos escolhidos é relevante, de modo que a ordem em que eles forem tomados não importa. Escrevemos $C_{n,r}$ para indicar a quantidade de combinações de n elementos, tomados r a r.

<u>Importante</u>: Agrupamentos com elementos distintos, não se alteram mudando-se apenas a ordem de posicionamento dos elementos no grupo. A diferenciação ocorre apenas, quanto à natureza dos elementos, quando há mudança de elementos.

Por exemplo: Uma conceituada escola de idiomas está realizando uma promoção onde você escolhe três cursos, dos cinco disponíveis, e paga apenas $^2/_3$ do valor da mensalidade de cada um dos cursos escolhidos.

Podemos facilmente perceber que alguém que tenha escolhido os cursos de **inglês**, **espanhol** e **alemão**, fez as mesmas escolhas que outro alguém que tenha escolhido **alemão**, **inglês** e **espanhol**, por exemplo, pois a ordem dos cursos de idioma em si, não gera distinção entre uma escolha e outra. Se alguém escolheu **inglês**, **espanhol** e **alemão** e outra pessoa escolheu **inglês**, **espanhol** e **francês**, também claramente podemos perceber que se tratam de escolhas distintas, pois nem todos os cursos que uma pessoa escolheu, são os mesmos escolhidos pela outra pessoa.

Exemplos

Exemplo 1: Dentre um grupo de 7 pessoas, de quantas formas podemos montar uma equipe de 3 pessoas para realizar uma tarefa?

Solução: Temos aqui um conjunto de 7 elementos e gostaríamos de escolher 3 elementos distintos dentre eles. A diferença fundamental é que, agora, a ordem em que os 3 elementos são escolhidos para participar da equipe é irrelevante (não tem importância). De outra forma, estamos interessados apenas em quem serão os membros da equipe, e não em que ordem eles serão escolhidos. Queremos, então, determinar o número de combinações de 7 escolhidos 3 a 3, ou seja, $C_{7,3}$. Vamos supor, por um momento, que a equipe seja montada através de um sorteio, da seguinte forma: os nomes das pessoas são escritos em papeizinhos e colocados em uma urna; iniciamos sorteando um nome qualquer dessa urna (removendo um papelzinho da mesma); em seguida, sorteamos um segundo nome dentre os 6 restantes e, por fim, sorteamos um terceiro nome, dentre os 5 restantes. Veja que estamos realizando três escolhas e que, pelo princípio fundamental da contagem, o total de possíveis resultados para essa sequência de três sorteios é igual a $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$. Porém, isso ainda não resolve a questão. Temos um problema! Os membros de uma mesma equipe podem ser sorteados de várias maneiras diferentes, o que indica que o número de possíveis equipes não é igual ao número de resultados para os sorteios. Por exemplo, a equipe composta pelas pessoas A, B e C, pode ser montada como resultado de um sorteio onde o primeiro nome escolhido foi o de A, seguido pelo de B e depois o de C; mas pode também ter sido montada escolhendo-se essas pessoas na ordem B, A, C, ou seguindo qualquer outra permutação de {A, B, C}. Na verdade, para qualquer equipe (com 3 pessoas), os nomes de seus membros podem ter sido sorteados de exatamente 3! = 6 maneiras diferentes, que é o número de maneiras de permutar os 3 nomes. Dessa forma, temos que dividir a quantidade de sorteios por 6 para obter o número de possíveis equipes. Assim, o número de equipes é igual a 210/6 = 35, de sorte que $C_{7,3} = 35$.

Exemplo 2: Em um campeonato de futebol com 6 times, cada time jogou exatamente uma vez contra cada um dos outros. Quantos jogos aconteceram?

Solução. Claramente, a quantidade de jogos que aconteceram é igual ao número de maneiras de escolhermos 2 times dentre os 6. Esse número é igual a $C_{6,2} = (6 \cdot 5)/ 2 = 15$. Uma prova direta é a seguinte: o primeiro time de um jogo pode ser escolhido de 6 maneiras, ao passo que o segundo pode ser escolhido de 5 maneiras. Isso nos daria, pelo PFC, $6 \cdot 5$ pares de times. Entretanto, a ordem em que os times que compõem um par forem escolhidos não é relevante, pois, ainda que invertamos essa ordem, teremos a mesma partida. Por isso temos que dividir o resultado por 2!=2, obtendo 15 jogos.

Exemplo 3: De quantas maneiras diferentes um técnico pode escalar seu time de basquete tendo à sua disposição 12 atletas que jogam em qualquer posição?

Solução: São 5 jogadores a serem escolhidos entre 12. Então, teríamos 12*11*10*9*8=95040 possibilidades, se a ordem em que os elementos fossem escolhidos importasse (criasse um novo elemento), mas como a ordem em que os elementos são escolhidos não determina um novo elemento, temos que dividir este resultado pela permutação de 5 elementos, que é igual a 5! (que representa a quantidade de vezes que foi contado um mesmo time, pelas diversas maneiras de selecionar os seus 5 elementos). Então: 95040/5! = 95040/120 = 792 possibilidades.

Exemplo 4: Considere um grupo formado por 7 homens (entre os quais José) e 5 mulheres (entre as quais Maria), do qual se quer extrair uma comissão constituída por 4 pessoas. Quantas são as comissões:

(a) Possíveis?

Solução: Devemos escolher 4 das 12 pessoas, o que pode ser feito de $C_{4\,12}$ modos, que é igual a $12\times11\times10\times9 / 1\times2\times3\times4 = 495$ comissões.

(b) Formadas por 2 homens e 2 mulheres?

Solução: Para formar uma comissão, devemos escolher os 2 homens, o que pode ser feito de $C_{2\,7}$ modos, e, a seguir, as 2 mulheres, o que pode ser feito de $C_{2\,5}$ maneiras. O número total de possibilidades de escolha, pelo princípio multiplicativo, é $C_{2\,7} \times C_{2\,5} = 21 \times 10 = 210$ comissões.

(c) Em que haja pelo menos 2 mulheres?

Solução: Há 3 tipos de comissão possíveis: com 2 homens e 2 mulheres, com 1 homem e 3 mulheres e com 4 mulheres. Para obter o número total de comissões, contamos separadamente as comissões de cada tipo e somamos os resultados, obtendo $C_{2\,7} \times C_{2\,5} + C_{1\,7} \times C_{3\,5} + C_{4\,5} = 210 + 70 + 5 = 285$ comissões. Uma tentativa de contagem que leva a um erro muito comum é a seguinte: como a comissão deve ter pelo menos 2 mulheres, inicialmente escolhemos 2 mulheres, o que podemos fazer de $C_{2\,5} = 10$ modos. A seguir, basta escolher 2 pessoas quaisquer entre as 10 que sobraram, o que pode ser feito de $C_{2\,10} = 45$ modos. Logo, por este raciocínio, teríamos $10 \times 45 = 450$, que difere do resultado (correto) encontrado acima. Essa solução, portanto, está errada.

(d) Em que José participe, mas Maria não?

Solução: Como José deve participar da comissão, resta escolher apenas 3 outras pessoas, entre as 10 restantes (já que José já foi escolhido e Maria não pode ser escolhida). Logo, o número de possibilidades é igual a $C_{3\,10} = 120$.

(e) Formadas por 2 homens, entre os quais José, e 2 mulheres, mas sem incluir Maria?

Solução: Temos que escolher 1 homem entre 6 (José já está escolhido) e 2 mulheres entre 4 (Maria não pode ser escolhida). O número de comissões é $C_{1\,6} \times C_{2\,4} = 6 \times 6 = 36$.

Exercícios

1) Dispondo de 6 frutas, quantas vitaminas podemos fazer utilizando exatamente três destas frutas?

2) Numa sala há 6 pessoas e cada uma cumprimenta todas as outras pessoas com um único aperto de mão. Quantos foram os apertos de mão?

3) São dados 10 pontos no plano, de maneira que não existe reta que contenha mais de dois destes pontos.
a) Qual o número de retas que contém dois destes pontos?
b) Quantos triângulos podem ser desenhados, cujos vértices são três destes pontos?
c) Quantos heptágonos podem ser desenhados, cujos vértices são sete destes pontos?

4) Considerando um grupo de 20 pessoas que participam de um conselho consultor de uma empresa, calcule:
a) O número de maneiras de escolher um presidente, um vice-presidente e um diretor para o conselho.
b) O número de maneiras de montar uma equipe de 4 pessoas do conselho para realizar uma tarefa.

5) Uma turma tem 25 alunos. De quantas maneiras diferentes é possível escolher os grupos a seguir nessa turma?

a) Um monitor e o representante.

b) Dois monitores.

c) Três monitores.

6) O volante da Mega-Sena contém 60 números (cada um chamado de dezena), que são 01, 02, 03, ..., 60. O resultado de um sorteio é composto de 6 dezenas, sorteadas entre as 60 dezenas. Quantos são os resultados possíveis?