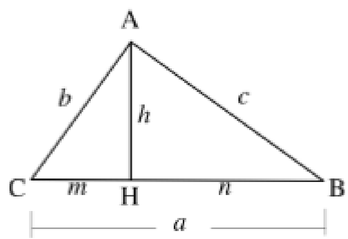
Semelhança de triângulos.

A partir de um triângulo ABC, retângulo em A, traçamos a altura AH e verificamos que os triângulos AHB e AHC são semelhantes ao triângulo ABC.

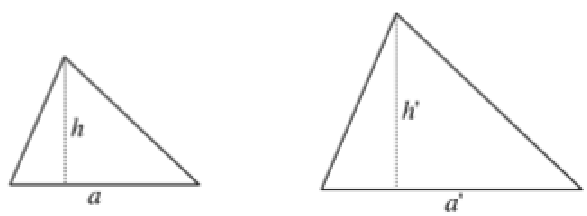


Da semelhança dos triângulos AHC e ABC temos $b^2 = am$ e, da semelhança dos triângulos AHB e ABC, temos $c^2 = an$. Somando essas duas relações membro a membro, encontramos:

$$b^2 + c^2 = am + an = a(m+n) = a \times a = a^2.$$

Propriedade: A razão entre as áreas de triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Observe, na figura a seguir, dois triângulos semelhantes com bases a e a' e alturas h e h'.



Como são semelhantes, a razão entre as bases é a mesma razão entre as alturas. Esse número é a razão de semelhança das duas figuras:

$$k = \frac{a}{a'} = \frac{h}{h'}.$$

Porém, se S e S' são as áreas dos dois triângulos temos:

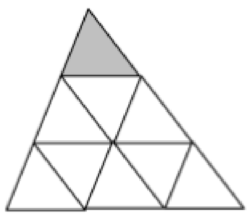
$$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{ah}{2}}{\frac{a'h'}{2}} = \frac{a}{a'} \times \frac{h}{h'} = k \times k = k^2$$

Vejamos um exemplo simples.

Os dois triângulos da figura são semelhantes. Se a área do menor é igual a 8, qual é a área do maior?

Para esta pergunta, alunos têm uma tendência irresistível de responder rapidamente que a área do triângulo maior é 24. Porém, isto não é verdade. A razão de semelhança dos dois triângulos é $k = \dfrac{1}{3}$ e, portanto, a razão entre suas áreas é $\dfrac{1}{9}$. Daí, se a área do menor é igual a 8, a área do maior é 72.

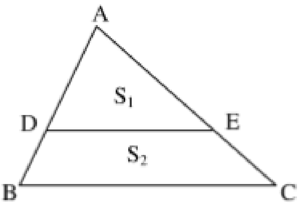
Você pode ver esta relação na figura a seguir. Realmente, o triângulo pequeno cabe 9 vezes dentro do grande.



A propriedade , que mostramos para triângulos, vale naturalmente para polígonos, pois estes podem ser divididos em triângulos. Mas, é importante saber que esta propriedade vale para quaisquer figuras semelhantes.

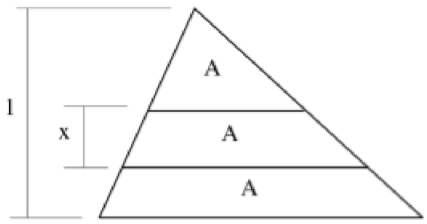
A razão entre as áreas de figuras semelhantes quaisquer é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Exercício: Na figura a seguir,$AD = \frac{2}{3}AB$ e $AE = \frac{2}{3}AC$. O segmento DE divide o triângulo em duas partes: um triângulo de área S1 e um trapézio de área S2. Qual destas duas áreas é maior?



Solução: A razão de semelhança entre os triângulos ADE e ABC é $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$. Então, a razão entre suas áreas é $(2/3)^2$. Se S é a área do triângulo ABC, então $\frac{S_1}{S} = \frac{4}{9}$. Logo, S_1 é menor que a metade de S e, portanto, S_2 é maior que a metade de S. Daí, $S_2 > S_1$.

Exercício: A figura abaixo mostra um triângulo de altura 1 dividido por duas retas paralelas à sua base em três partes de mesma área. Qual é a altura do trapézio central?



Solução: Seja h a altura do triângulo menor. A figura mostra três triângulos semelhantes: um de área A e altura h, outro de área $2A$ e altura $h+x$ e o terceiro de área $3A$ e altura 1. Como a razão entre as áreas de triângulos semelhantes é o quadrado da razão de semelhança temos, entre o primeiro e o terceiro,

$$\frac{A}{3A} = (h/1)^2$$

ou seja

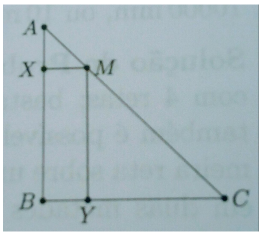
$$h = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Agora, entre o segundo e o terceiro, temos:

$$\frac{A}{3A} = (h + x/1)^2 \text{ ou seja } h + x = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Portanto, $x = \sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}$

Exercício: Dados um triângulo ABC com ângulo $B = 90^{|}circ$, $AB = BC = 1$ e um ponto M escolhido aleatoriamente em AC, é possível saber qual é a soma das distâncias de M a AB e de M a BC?



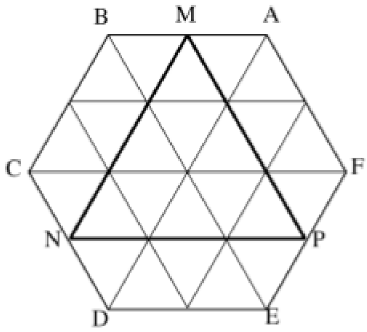
Solução: A soma das distâncias sempre será igual a 1. Do ponto M no lado AC, a distância de M a AB é o comprimento da perpendicular estendida de M ao lado AB. Vamos denotá-la por MX. O triângulo MXA é semelhante ao triângulo CBA, logo $MX = AX$. Mas, como MX e BC estão em retas paralelas, a distância de M a BC estão em retas paralelas, a distânciade M a BC é igual à distância de X a BC, que é BX. Portanto, a soma é igual a $AX + XB = AB = 1$.

Exercício: ABCD é um quadrilátero (considere somente o caso convexo) de área 1. Os pontos médios dos lados AB, BC, CD e AD são denotados, respectivamente, por K, L, M e N. Encontre a área de KLMN.

Solução: O triângulo AKN é semelhante ao triângulo ABD com coeficiente de proporcionalidade $\frac{1}{2}$. Logo sua área é $\frac{1}{4}$ da área de ABD. Analogamente, a área de CML é $\frac{1}{4}$ da área de $ABCD$. Analogamente, a soma das áreas de BLK e DNM é $\frac{1}{4}$ da área de $ABCD$. Portanto, a área de $KLMN$ é $\frac{1}{2}$.

Exercício: ABCDEF é um hexágono regular. Os pontos M, N e P são médios dos lados AB, CD e EF. Qual é a razão entre a área do triângulo MNP e a área do hexágono?

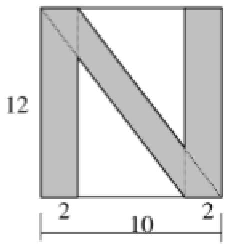
Solução: Observe a figura a seguir.



O hexágono está dividido em 24 triângulos equiláteros iguais e o triângulo MNP contém 9 deles. A razão entre a área do triângulo e do hexágono é $\frac{9}{24}$, ou seja, $\frac{3}{8}$.

Exercício: A letra N da figura abaixo foi construída a partir de um retângulo de base 10 e altura 12. Calcule sua área

Solução:



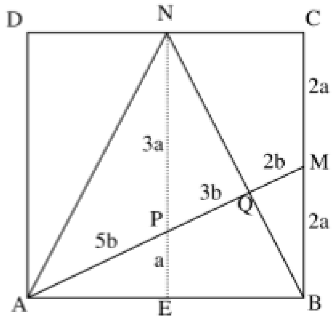
A ideia mais simples parece que é calcular a área do retângulo e subtrair a área dos dois triângulos retângulos vazios. O retângulo tem área $10 \times 12 = 120$ e cada triângulo retângulo tem um cateto igual a 6 e outro igual a x. Uma simples semelhança nos dá:

$$\frac{x}{12} = \frac{6}{8}$$

ou seja, $x = 9$. Então, a área dos dois triângulos juntos é $6 \times 9 = 54$ e a área sombreada é igual a $120 - 54 = 66$.

Exercício: Seja ABCD um quadrado de lado 1 e sejam M e N os pontos médios dos lados BC e CD, respectivamente. Traçando os segmentos AM, AN e NB, calcule as áreas das cinco partes em que o quadrado ficou dividido.

Solução:



O ponto Q é a interseção de AM com BN e traçamos por N a perpendicular NE a AB, que cortou AM em P. Fazendo $BM = MC = 2a$ temos $PE = a$ e $NP = 3a$. Como os triângulos QPN e QMB são semelhantes, se fizermos $QM = 2b$, teremos $PQ = 3b$ e $AP = 5b$. Vamos representar por $(XYZ...)$ a área do polígono $XYZ...$ Como o quadrado ABCD tem lado 1, a área do triângulo ABM é igual a 1/4. Vamos agora calcular a razão entre as áreas dos triângulos ABQ e ABM.

$$\frac{(ABQ)}{(ABM)} = \frac{8b}{10b} = \frac{4}{5}$$

Logo, $(ABQ) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$ e assim calculamos a área de uma das partes. A área de BQM é a diferença: $(BQM) = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$. Os triângulos ABM e BCN são congruentes e, portanto, têm mesma área. Logo a área do quadrilátero MCNQ é a mesma área do triângulo ABQ. Logo, $(MCNQ) = \frac{1}{5}$.

Como a área do triângulo ADN é $\frac{1}{4}$, então a área do triângulo AQN é

$$(AQN) = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{4} = \frac{3}{10}$$

.