Encontro Final

REVISÃO - CONTAGEM

Nível 3
PO: Márcio Reis
11° Programa de Iniciação Científica Jr.

Contagem

- Princípio multiplicativo e princípio aditivo;
- Permutações e Combinações;
- Probabilidade;
- Probabilidade Condicional;
- Permutações de elementos nem todos distintos e permutações circulares;
- Combinações Completas (ou com repetição);
- Objetos e Caixas

Princípio fundamental da Contagem (multiplicativo)

"Se desejamos executar uma sequência de $\boldsymbol{n}$ ações, onde a primeira ação pode ser executada de $\boldsymbol{m_1}$ maneiras, a segunda de $\boldsymbol{m_2}$ maneiras e assim sucessivamente, até que a n-ésima ação pode ser executada de $\boldsymbol{m_n}$ maneiras, então o número total de maneiras de executar essa sequência de ações é igual ao produto $m_1 m_2 \ldots m_n$."

Princípio Aditivo

"Ao dividir um problema de contagem em casos, onde dentro de cada caso contamos o número de soluções que nele se enquadram e todas as soluções se enquadram em exatamente um dos casos, o número total de soluções é igual à soma dos números de soluções de cada caso."

Exercício 1

Escrevendo no tabuleiro – Um tabuleiro quadrado de três linhas por três colunas contém nove casas. De quantos modos diferentes podemos escrever as três letras **A**, **B** e **C** em três casas diferentes, de tal modo que, em cada linha, esteja escrita exatamente uma dessas três letras?

Exercício 1 – Solução

Escrevendo no tabuleiro **–** Começando com a letra **A**, ela pode ser escrita em qualquer uma das nove casas do tabuleiro. Uma vez escrita a letra **A**, sobram seis casas nas quais pode ser escrita a letra **B**. Uma vez escritas as letras **A** e **B** no tabuleiro, sobram três casas para a letra **C** ser escrita. Assim, pelo *princípio multiplicativo*, existem $9 \times 6 \times 3 = 162$ maneiras diferentes das letras **A**, **B** e **C** serem escritas no tabuleiro.

Permutações

A noção de permutação está ligada ao ato de permutar, ou seja, **reordenar um grupo de objetos.** Dado um conjunto finito A, uma permutação dos elementos de A é uma lista ordenada, ou seja, uma sequência, na qual cada elemento de A aparece exatamente uma vez. Por exemplo, quando A = {v, w, x, y, z}, temos que a lista ordenada (x, v, w, z, y) é uma permutação dos elementos de A, na qual o primeiro elemento é x, o segundo é v, e assim por diante.

$$P_n = n!$$

Permutações com repetição

Permutamos n elementos, sendo que alguns deles são iguais.

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_n} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_n!}$$

Exercício 2

Abaixo, temos uma tabela 5×5 com a seguinte propriedade: ela é preenchida com os dígitos 0 e 1 de tal modo que, em cada linha e em cada coluna, o dígito 1 é usado exatamente uma vez.

0	0	0	1	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	1

Calcule a quantidade total de tabelas 5×5 distintas que possuem essa mesma propriedade.

Exercício 2

Basta decidir quais são as posições da tabela que serão ocupadas pelo dígito 1 (já que todas as demais serão ocupadas pelo digito 0). Faremos isso coluna por coluna. Vamos numerar as colunas (da esquerda para a direita) e as linhas (de cima para baixo) em nossa tabela com os números 1, 2, ..., n. Lembre-se de que, em cada coluna, devemos ter exatamente um dígito 1. Sendo assim, para cada natural i de 1 até n, precisamos escolher em qual linha iremos colocar o numero 1 que aparece na coluna i. Podemos, então, definir a_i, onde $1 \leq i \leq n$, como o número da linha na qual iremos colocar o dígito 1 da coluna i. Por exemplo, na tabela 5 × 5 acima, temos que $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) = (2,3,4,1,5)$. O raciocínio do parágrafo anterior garante que, para montar uma tabela, basta escolhermos os valores de $a_1,a_2,...,a_n$. Veja que a1 pode assumir qualquer um desses valores. Entretanto, uma vez escolhido a1, temos que a2 deverá assumir um valor diferente de a1 (já que não pode haver dois dígitos 1 em uma mesma linha).

5!=5x4x3x2x1=120 maneiras

Arranjos

- $0 \leq r \leq n$
- Um ***arranjo (simples)*** de ***n*** elementos (distintos), ***tomados r a r***, é qualquer maneira de listar ordenadamente ***r*** elementos, tomados dentre os ***n*** elementos dados. Escreveremos $A_{n,r}$ para indicar a quantidade de arranjos simples de ***n*** elementos, ***tomados r a r***.
- No caso em que $r = 0$, adotaremos a convenção de que $A_{n,0} = 1$, pois isso será coerente com a fórmula geral que iremos encontrar logo mais para $A_{n,r}$, quando $1 \leq r \leq n$.

$$A_{(n,r)} = \frac{n!}{n-r!}$$

Combinações

- Uma **combinação (simples) de n elementos (distintos), tomados r a r**, é qualquer escolha de r elementos dentre os n elementos dados. Em uma combinação, **apenas o conjunto dos elementos escolhidos é relevante, de modo que a ordem em que eles forem tomados não importa.** Escrevemos **$C_{n,r}$** para indicar a quantidade de combinações de n elementos, tomados r a r.

No caso em que r = 0, definimos $C_{n,0} = 1$, de forma semelhantes ao que havíamos feito com arranjos. Observamos também que, no lugar de escrevemos "combinação de n elementos escolhidos r a r" ´e comum escrevermos apenas "combinação de n escolhe r" (ainda que o Português de tal frase careça de correção) ou, ainda, falarmos diretamente de uma "escolha de r elementos dentre n".

$$C_{(n,r)} = \frac{n!}{r!(n-r!)}$$

Exercício 3

Um batalhão possui 50 soldados, incluindo os soldados Ryan e Chuck Norris. Determine de quantas formas podemos montar um time com 4 soldados para uma missão, de modo que:

(a) o soldado Ryan participe dessa missão.

(b) nem o soldado Ryan nem o soldado Chuck Norris participem da missão.

(c) Ryan e Chuck Norris não sejam escolhidos simultaneamente para a missão.

Exercício 3 - Solução

(a) Como Ryan deve ser escolhido, precisamos apenas escolher os demais 3 soldados, dentre os 49 restantes, para a missão. Assim, o número de maneiras de fazer isso é: $\binom{49}{3} = 18.424$.

(b) Nesse caso, ainda precisamos escolher 4 soldados para a missão, mas estes devem ser escolhidos dentre os demais 48 soldados. Assim, o número de maneiras é igual a $\binom{48}{4} = 194.580$.

(c) A maneira mais fácil de fazer a contagem, nesse caso, é usando o método do complementar: vamos contar o total de times de 4 soldados (sem qualquer restrição) e subtrair a quantidade de times que são ruins, ou seja, aqueles em que ambos Ryan e Chuck Norris estão presentes. O resultado dessa conta é igual a:

$$\binom{50}{4} - \binom{48}{2} = 230.300 - 1.128 = 229.172.$$

11º PIC Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Probabilidade

Dado o espaço amostral Ω de certo experimento aleatório, uma probabilidade é uma função que atribui a cada evento $E \subset \Omega$ um determinado valor $Pr(E)$ que satisfaz algumas condições que listaremos mais adiante.

Probabilidade

Suponha que $\Omega = \{\omega 1, \ldots, \omega k\}$. Uma probabilidade Pr em Ω é uma função definida sobre os subconjuntos de Ω e satisfazendo as condições a seguir:

(a) $Pr(\emptyset) = 0$;

(b) $0 \leq Pr(\omega i) \leq 1$, para todo $\omega i \in \Omega$;

(c) $Pr(\omega 1) + Pr(\omega 2) + \cdots + Pr(\omega k) = 1$;

(d) para qualquer evento E, a probabilidade de E ocorrer, denotada por Pr(E), é a soma das probabilidades de seus elementos.

Exercício 4

Meu pai ouviu esta história no rádio. Na Universidade Duke, dois alunos receberam notas máximas em química ao longo de todo o semestre. Mas na véspera da prova final, os dois foram a uma festa em outro estado e não voltaram à universidade a tempo para a prova. Disseram ao professor que um pneu do carro havia furado e perguntaram se poderiam fazer uma prova de segunda chamada. O professor concordou, escreveu uma segunda prova e mandou os dois a salas separadas. A primeira pergunta (na primeira página) valia meio ponto. Eles viraram então a página e encontraram a segunda pergunta, que valia 9,5 pontos: "Qual era o pneu?" Qual é a probabilidade de que os dois alunos deem a mesma resposta? Meu pai acha que é de 1/16. Ele está certo?

Trecho do livro **"O Andar do Bêbado"**, de Leonard Mlodinow.

Exercício 4 - Solução

O carro tem 4 pneus, portanto, seja DD o pneu dianteiro direito e assim por diante, há 16 combinações possíveis entre as respostas dos dois alunos. Se a primeira resposta citada representa a do estudante 1 e a segunda a do estudante 2, as possíveis respostas combinadas são: (DD, DD), (DD, DE), (DD, TD), (DD, TE), (DE, DD), (DE, DE), (DE, TD), (DE, TE), (TD, DD), (TD, DE), (TD, TD), (TD, TE), (TE, DD), (TE, DE), (TE, TD), (TE, TE). Dentre estas, 4 apresentam concordância (DD, DD), (DE, DE), (TD, TD), (TE, TE). Portanto, a probabilidade é de 4 /16, ou 1/4.

Trecho do livro **"O Andar do Bêbado"**, de Leonard Mlodinow.

Exercício 5

Cada uma das cem pessoas de uma fila escolhe, ao acaso, um número de 1 a 20 e o escreve em um papel, mantendo esse número em segredo. Depois que todos escreveram, o primeiro da fila anuncia o seu número. Em seguida, o segundo da fila faz o mesmo, e assim sucessivamente. A primeira pessoa que anunciar um número igual a um número já anunciado ganha um prêmio.

a) O primeiro da fila não tem chance de ganhar o prêmio. Qual é a posição da próxima pessoa da fila que também não tem chance alguma de ganhar o prêmio?

b) Qual é a probabilidade de que o terceiro da fila ganhe o prêmio?

c) Quem tem maior probabilidade de ganhar o prêmio: o sétimo da fila ou o oitavo? Justifique.

d) Em que posição ou posições da fila é maior a probabilidade de ganhar o prêmio? Justifique.

Exercício 5 - Solução

item a)

O 22º da fila, pois até o 21º teremos 21 cartõespara 20 números e podemos afirmar, pelo Princípio dasCasas dePombos, que haverá pelo menos dois cartões com o mesmo número, ou seja, o prêmio já terá saído.

Item b)

Para que o terceiro ganhe, o segundo deve ter um número diferente do primeiro e o terceiro ter um número igual a um dos cartões dos dois primeiros:

$$P_3 = \frac{20x19x2}{20x20x20} = \frac{19}{200} = 9{,}5\%$$

Item c)

Vamos calcular a fração P_8/P_7:

$$\frac{P_8}{P_7} = \frac{\frac{20x19x18x17x16x15x14x7}{20x20x20x20x20x20x20x20}}{\frac{20x19x18x17x16x15x6}{20x20x20x20x20x2020}} = \frac{\frac{14x7}{20}}{\frac{6}{1}} = \frac{98}{120} < 1$$

Logo $P_8 < P_7$.

Exercício 5 - Solução

Item d)

Vamos calcular a fração P_{n+1}/P_n

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{\dfrac{20x(19).(18).\ldots[20-(n-2)].[20-(n-1)].n}{20.20.20.\ldots 20.20}}{\dfrac{20x(19).(18).\ldots[20-(n-3)].[20-(n-2)].(n-1)}{20x20x20x\ldots.20}} = \frac{\dfrac{(21-n).n}{20}}{\dfrac{(n-1)}{1}} = \frac{21n-n^2}{20n-20}$$

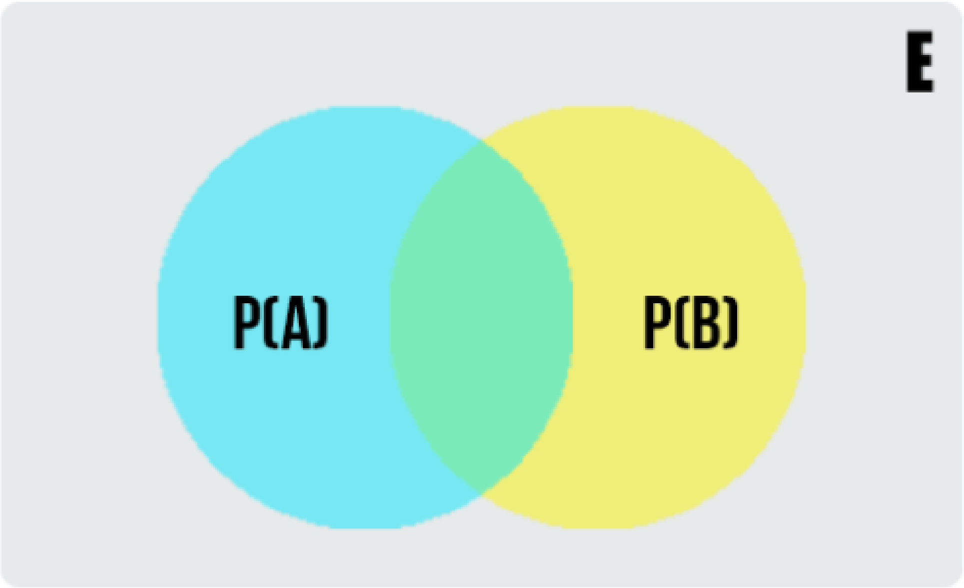
Vamos analisar agora a partir de qual n, maior do que 1, P_{n+1} fica menor que P_n, ou seja, $\frac{P_{n+1}}{P_n} < 1$

$$\frac{21n-n^2}{20n-20} < 1 \Leftrightarrow 21n-n^2 < 20n-20 \Leftrightarrow n^2-n-20 > 0 \Leftrightarrow n > 5 \Leftrightarrow n \geq 6$$

Logo, $P_6 > P_7 > P_8 > \ldots > P_{21}$. Analogamente, $P_{n+1} = P_n$ quando $n^2-n-20=0$, ou seja, quando n = 5. Logo $P_5 = P_6$ e $P_{n+1} > P_n$ quando $n^2-n-20<0$, ou seja, quando n < 5. Logo, $P_2 < P_3 < P_4 < P_5$.

A maior probabilidade ocorre para os participantes nas posições 5 e 6.

Probabilidade Condicional



Em um espaço amostral, tendo acontecido o evento A, qual é a chance de que então aconteça o evento b?

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exercício 5

Uma questão de múltipla escolha tem 5 alternativas. Dos alunos de uma turma, 50% sabem resolver a questão, enquanto os demais “chutam” a resposta. Um aluno da turma é escolhido ao acaso.

Qual é a probabilidade de que ele tenha acertado a questão?

Exercício 5 - Solução

Solução: Neste caso, vamos utilizar probabilidades condicionais conhecidas para calcular a probabilidade de dois eventos ocorrerem simultaneamente. Observe que, da expressão $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ decorre $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$. Se o aluno sabe resolver a questão, ele tem probabilidade 1 de acertá-la, enquanto, se ele não sabe, sua probabilidade de acerto é $1/5 = 0{,}2$. Portanto, $P(\text{acerta}|\text{sabe}) = 1$, enquanto $P(\text{acerta}|\text{não sabe}) = 0{,}2$. Podemos, então, obter as seguintes probabilidades:

$$P(\text{sabe e acerta}) = P(\text{sabe}) \cdot P(\text{acerta}|\text{sabe}) = (0{,}5) \cdot 1 = 0{,}5$$

$$\begin{aligned} P(\text{não sabe e acerta}) &= P(\text{não sabe}) \cdot P(\text{acerta}|\text{não sabe}) \\ &= 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} P(\text{acerta}) &= P(\text{sabe e acerta}) + P(\text{não sabe e acerta}) \\ &= 0{,}5 + 0{,}1 = 0{,}6. \end{aligned}$$

Permutações circulares

De modo geral, o número de modos de colocar n objetos em círculo, considerando-se iguais disposições que coincidam por rotação (ou seja, o número de *permutações circulares* de n objetos) é $PC_n = (n-1)!$.

Exercício 6

Se 4 meninos e 4 meninas vão brincar de roda, de quantas maneiras poderão dar as mãos, de modo que pelo menos 2 meninas estejam juntas?

Exercício 6

O número de maneiras de dispor as 8 crianças na roda é igual a $PC_8 = 7! = 5040$. Vamos calcular o número de maneiras de dispor as crianças na roda de modo que não estejam 2 meninas juntas. Para tal, primeiro dispomos as 4 meninas na roda, o que pode ser feito de $PC_4 = 3! = 6$ maneiras. Uma vez dispostas as meninas na roda, deve-se dispor cada um dos 4 meninos entre cada par de meninas (de modo que nunca duas meninas fiquem juntas), o que pode feito de $4! = 24$ maneiras. Assim, o número de maneiras de dispor as crianças na roda de modo que não estejam 2 meninas juntas é igual a $6 \cdot 24 = 144$ maneiras. Assim, O número de maneiras de dispor as 8 crianças na roda, de modo que pelo menos 2 meninas estejam juntas, é igual a $5040 - 144 = 4896$.

Combinações Completas (ou com repetição)

Naturalmente, podemos aplicar esta solução para o problema geral de contar o número de maneiras de distribuir p objetos para n pessoas (ou seja, de calcular o número de soluções inteiras e não negativas de $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = p$, ou ainda, de calcular o número CR_n^p de combinações completas de n elementos tomados p a p). Temos p bolas, que devem ser separadas por $n - 1$ tracinhos. Ou seja, precisamos escolher p das $n + p - 1$ posições para as bolas. A resposta, portanto, é $CR_n^p = C_{n+p-1}^p$.

Exercício 7

De quantas maneiras podemos comprar 12 picolés de uma loja que os oferece em 4 sabores, digamos morango, framboesa, uva e chocolate, sabendo que a loja possui em seu estoque apenas 5 picolés de morango. Assuma que a loja possui pelo menos 10 picolés de cada um dos outros três sabores.

Exercício 7 - Solução

Solução. Considere uma maneira de comprar os picolés. Sejam m, f, u, c respectivamente as quantidade de picolés de morango, framboesa, uva e chocolate. Temos que

$$m + f + u + c = 12, \tag{3}$$

com as seguinte restrições: $0 \leq m \leq 5$ e os valores de f, u, c são não negativos. Primeiramente, vamos ignorar a restrição $m \leq 5$ e contar o número de soluções não negativas da equação $m + f + u + c = 12$. A resposta segue diretamente da fórmula (1):

$$\binom{4-1+12}{4-1} = \binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2} = 455.$$

Exercício 7 - Solução

Agora, dessas 455 soluções, devemos desconsiderar aquelas em que $m \geq 6$. Vamos, então, contar quantas são as soluções ruins (ou seja, inválidas). Isso pode ser feito como nos exemplos anteriores, com auxílio de uma substituição de variável. Pondo $m' = m - 6$, temos $m = m' + 6$. Substituindo esse valor na equação 3 obtemos a equação equivalente $m' + 6 + f + u + c = 12$ ou, ainda,

$$m' + f + u + c = 6.$$

Essa equação, por sua vez, possui $\binom{4-1+6}{4-1} = \binom{9}{3} = 84$ soluções.

Então, concluímos que, das 455 soluções, 84 são ruins (pois violam a restrição sobre m) e devem ser descartadas. Logo, o número de soluções que satisfazem as restrições do problema é igual a $455 - 84 = 371$. $\square$

Objetos e Caixas

- Objetos distintos em caixas distintas: $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{n \text{ vezes.}} = n^r$

- Objetos idênticos em caixas distintas: $CR_{n,r}$

- Objetos distintos em caixas idênticas e objetos distintos em caixas distintas: http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c7ulccajve8sc.pdf

Exercício 8

(UNIRIO). *Calcule o número de maneiras diferentes pelas quais podemos repartir uma dúzia de balas iguais entre três crianças, Antonio, Beatriz e Carlos.*

Exercício 8

Solução. Nesse caso as balas são idênticas, mas as três crianças são pessoas diferentes. Assim, as crianças desempenham o papel de $n = 3$ caixas distintas, ao passo que as balas são os $r = 12$ objetos iguais a serem distribuídos. Pelo que fizemos acima, o número de maneiras de distribuir as balas é $CR_{3,12}$. $\square$

Para as férias!

- ***Livro***

O Andar do Bêbado, de Leonard Mlodinow.

Leia um trecho: [*http://www.zahar.com.br/sites/default/files/arquivos/trecho_MLODINOW_OAndarDoBebado_0.pdf*](http://www.zahar.com.br/sites/default/files/arquivos/trecho_MLODINOW_OAndarDoBebado_0.pdf)

- ***Filme***

Quebrando a banca, 2008.

[*https://filmow.com/quebrando-a-banca-t6079/*](https://filmow.com/quebrando-a-banca-t6079/)