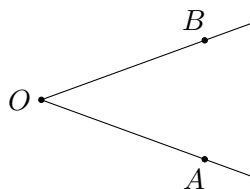
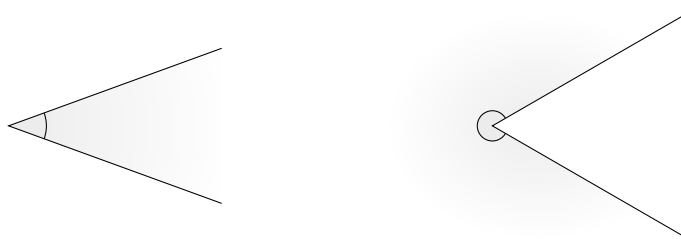


## 5.2 Ângulos

Um **ângulo** é a figura formada por duas semirretas de mesma origem. Estas semirretas são chamadas de **lados** e a origem comum dos lados é o **vértice** do ângulo. Na figura a seguir vemos um ângulo com lados  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  e com vértice no ponto  $O$ . Em uma situação como esta, este ângulo será denotado por  $A\hat{O}B$ .



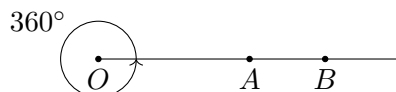
Quando os lados não são coincidentes, um ângulo divide o plano em duas regiões ilimitadas, chamadas de **regiões angulares**. Para indicar cada uma destas regiões, costuma-se utilizar um pequeno arco de circunferência com centro no vértice do ângulo. A figura a seguir ilustra as duas regiões angulares determinadas por um ângulo.



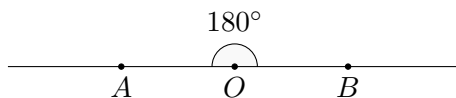
Vamos mostrar agora que do mesmo modo que medimos o comprimento de um segmento, também podemos medir a abertura de um ângulo. Após definir a medida de um ângulo, veremos que o termo “ângulo” será utilizado para significar três coisas: o ângulo propriamente dito (figura formada por duas semirretas de mesma origem); uma das regiões

angulares determinada por um ângulo; e o número que é a medida da abertura de uma dessas regiões angulares. Apesar desta tripla possibilidade, o contexto sempre determina cada caso.

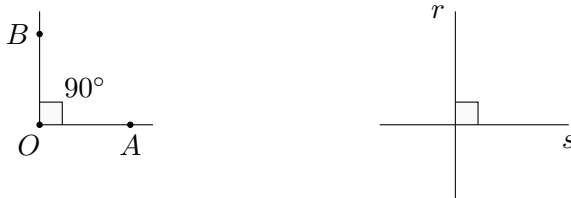
Os ângulos são medidos em **graus**. O ângulo que dá uma volta completa ao redor da sua origem tem 360 graus. Para abreviar a notação, substituímos a palavra “graus” por um pequeno círculo em cima e à direita do número. Assim escrevemos  $360^\circ$  para indicar “360 graus”.



Um ângulo que dá meia volta ao redor da sua origem mede 180 graus ou, abreviadamente,  $180^\circ$ . Este é um ângulo **raso** e os seus dois lados são duas semirretas opostas, pertencentes a uma mesma reta.



Um ângulo que dá um quarto de volta ao redor da sua origem mede  $90^\circ$ . Este é um ângulo **reto** e ele é formado pela interseção de duas retas **perpendiculares**. Diferentemente dos outros ângulos que são indicados por pequenos arcos de circunferência, um ângulo reto é indicado por um pequeno quadradinho como está ilustrado na figura a seguir onde, do lado esquerdo, vemos um ângulo reto e, do lado direito, vemos duas retas perpendiculares  $r$  e  $s$ , formando quatro ângulos retos.

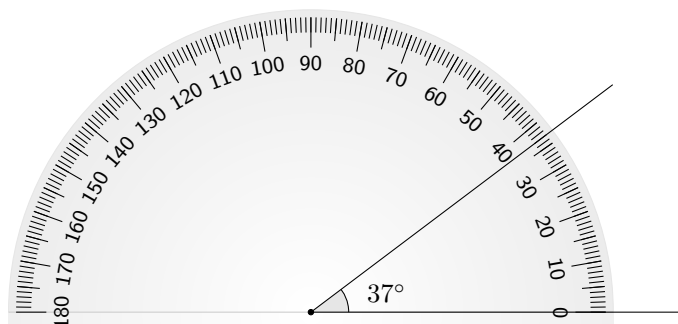


▲ 5.2 Ângulos

Um ângulo com medida de um grau é obtido quando dividimos uma circunferência em 360 partes iguais. Este ângulo tem uma abertura muito pequena e se parece com alguma coisa assim:



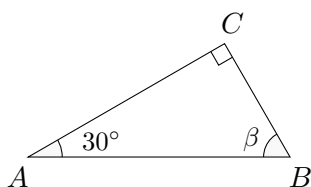
Para medir um ângulo utilizamos um transferidor. Por exemplo, na figura a seguir o ângulo indicado mede  $37^\circ$ .



Os ângulos não precisam ser múltiplos inteiros de um grau. Existem ângulos com medidas fracionárias. As principais subdivisões de um grau são os **minutos** e os **segundos**: um minuto é  $\frac{1}{60}$  de um grau e um segundo é  $\frac{1}{60}$  de um minuto. Para aprender mais sobre medida de ângulos e operações com graus, minutos e segundos assista o [vídeo 5](#), o [vídeo 8](#) e o [vídeo 9](#) da parte de [Geometria](#) do canal PICOBMEP no YouTube.

Gostaríamos de observar que podemos utilizar várias notações diferentes para ângulos. Por exemplo, no triângulo da figura a seguir estão indicados três ângulos:  $B\hat{A}C = 30^\circ$ ,  $A\hat{B}C = \beta$  e  $A\hat{C}B = 90^\circ$ . Quando

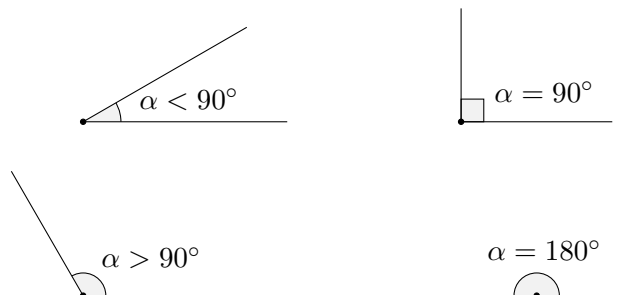
não existir possibilidade de confusão, podemos abreviar a notação, escrevendo apenas  $\hat{A} = 30^\circ$ ,  $\hat{B} = \beta$  e  $\hat{C} = 90^\circ$ . Em palavras, também podemos dizer que temos um ângulo de  $30^\circ$  no vértice  $A$ , um ângulo de medida  $\beta$  no vértice  $B$  e um ângulo reto no vértice  $C$ . Observe também que podemos utilizar a mesma notação para o ângulo e para a medida do ângulo. Por exemplo, a notação  $B\hat{A}C$  indica o ângulo de lados  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  e com vértice no ponto  $A$ , e esta mesma notação pode indicar a medida deste ângulo, quando escrevemos  $B\hat{A}C = 30^\circ$ .



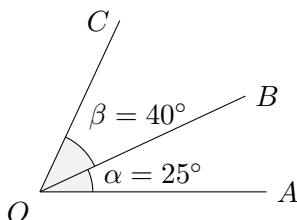
Já vimos as definições de ângulo raso e de ângulo reto. De modo geral, os ângulos são classificados do seguinte modo: dado um ângulo  $\alpha = A\hat{O}B$ , então:

- $\alpha$  é um ângulo **agudo** se  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .
- $\alpha$  é um ângulo **reto** se  $\alpha = 90^\circ$ . Este é o ângulo formado por duas retas **perpendiculares**.
- $\alpha$  é um ângulo **obtusos** se  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ .
- $\alpha$  é um ângulo **raso** se  $\alpha = 180^\circ$ .

▲ 5.2 Ângulos



Podemos **somar** dois ângulos desenhando um deles junto do outro, fazendo os seus vértices coincidirem e um lado de um ângulo coincidir com um lado do outro ângulo. Neste caso formamos dois **ângulos adjacentes**. Por exemplo, na figura a seguir vemos a soma do ângulo  $\alpha = A\hat{O}B = 25^\circ$  com o ângulo  $\beta = B\hat{O}C = 40^\circ$ , formando o ângulo  $\alpha + \beta = A\hat{O}C = 65^\circ$ . Nesta figura,  $\alpha$  e  $\beta$  são ângulos adjacentes.

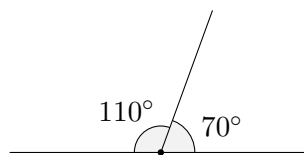
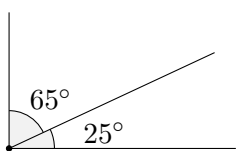


Existem dois casos especiais para o valor da soma de dois ângulos que vale a pena definir (veja o [vídeo 6](#)).

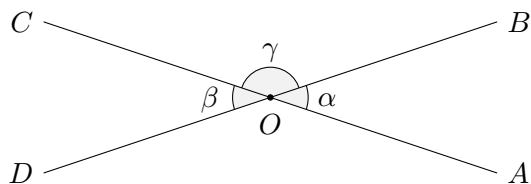
- Dois ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são **complementares** quando a soma das suas medidas é igual a  $90^\circ$ . Neste caso, dizemos que  $\alpha$  é o **complemento** de  $\beta$  e vice-versa. Por exemplo, os ângulos de medidas  $25^\circ$  e  $65^\circ$  são complementares, pois  $25^\circ + 65^\circ = 90^\circ$ . Neste caso dizemos que o complemento do ângulo de  $25^\circ$  é o ângulo de  $65^\circ$ .

Observe que na soma de dois ângulos complementares obtemos um ângulo reto, ou seja, retas perpendiculares.

- Dois ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são **suplementares** quando a soma das suas medidas é igual a  $180^\circ$ . Aqui dizemos que  $\alpha$  é o **suplemento** de  $\beta$  e vice-versa. Por exemplo, os ângulos  $70^\circ$  e  $110^\circ$  são ângulos suplementares, pois  $70^\circ + 110^\circ = 180^\circ$ . Observe que na soma de dois ângulos suplementares obtemos um ângulo raso.



Para terminar esta parte de definições básicas sobre ângulos, vamos definir o conceito de ângulos opostos pelo vértice. Dizemos que duas retas concorrentes  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{BD}$  em um ponto  $O$  definem dois pares de **ângulos opostos pelo vértice**:  $A\hat{O}B$  e  $C\hat{O}D$  são ângulos opostos pelo vértice, assim como  $A\hat{O}D$  e  $B\hat{O}C$  também são ângulos opostos pelo vértice. Então, para dois ângulos serem opostos pelo vértice eles devem possuir o mesmo vértice e os seus lados devem se juntar para formar duas retas. Na figura a seguir,  $\alpha$  e  $\beta$  são ângulos opostos pelo vértice.

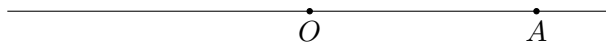


▲ 5.2 Ângulos

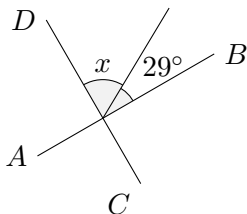
Utilizando o conceito de ângulos suplementares podemos mostrar que dois ângulos opostos pelo vértice possuem a mesma medida. De fato, na figura anterior  $\alpha = \widehat{A\hat{O}B}$  e  $\beta = \widehat{C\hat{O}D}$  são ângulos opostos pelo vértice. Se  $\gamma = \widehat{B\hat{O}C}$  então  $\alpha + \gamma = 180^\circ$  pois estes ângulos são suplementares. De modo análogo, vemos que  $\beta + \gamma = 180^\circ$ . Daí  $\alpha = 180^\circ - \gamma = \beta$  (veja esta demonstração no [vídeo 7](#)).

**Exercícios:**

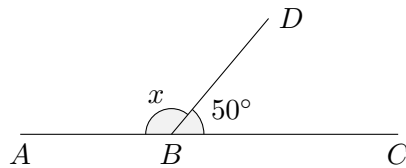
- (Transferidor) Com o auxílio de um transferidor, sobre a figura a seguir desenhe semirretas  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$ ,  $\overrightarrow{OD}$  e  $\overrightarrow{OE}$  tais que  $\widehat{AOB} = 30^\circ$ ,  $\widehat{AOC} = 60^\circ$ ,  $\widehat{AOD} = 90^\circ$  e  $\widehat{AOE} = 135^\circ$ .



- O que é um ângulo reto? O que são retas perpendiculares? O que significa dizer que dois ângulos são complementares? Na figura a seguir as retas  $AB$  e  $CD$  são perpendiculares. Neste caso, qual é a medida do ângulo  $x$ ? (veja [vídeo 7](#)).



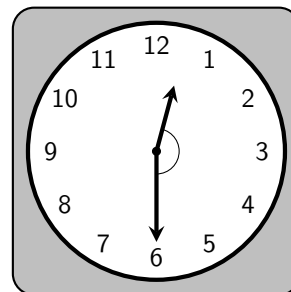
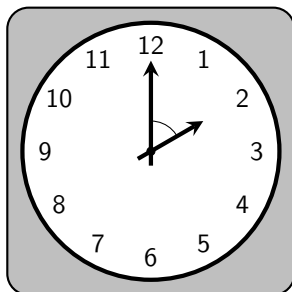
3. O que é um ângulo raso? O que são ângulos suplementares? Na figura a seguir, os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  estão alinhados. Qual é a medida do ângulo  $x$ ?



4. (OBMEP 2006 – N2Q13 – 1ª fase) Uma tira de papel retangular é dobrada ao longo da linha tracejada, conforme indicado, formando a figura plana a seguir. Qual a medida do ângulo  $x$ ?



5. (OBMEP 2006 – N1Q11 e N2Q10 – 1ª fase) Qual é a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando ele marca 2 horas? E qual é este menor ângulo quando o relógio marca 12 horas e 30 minutos?

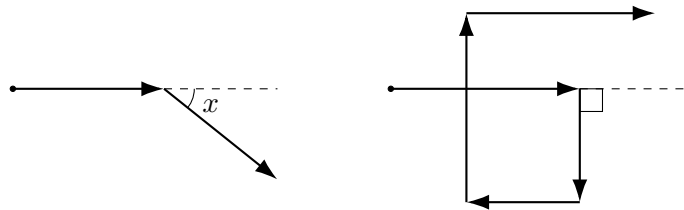




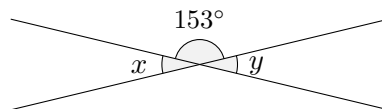
▲ 5.2 Ângulos

17

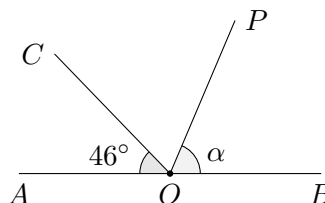
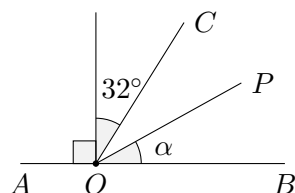
6. (Banco de Questões 2013 – Nível 1 – questão 15) Um certo robô só anda para a frente ou vira à direita, com um ângulo de  $x$  graus em relação à direção original com que estava andando, conforme é mostrado na figura a seguir, à esquerda. Para retornar à direção e ao sentido original, o robô precisa virar à direita um certo número de vezes. Por exemplo, se  $x = 90^\circ$ , então, o robô precisa virar à direita quatro vezes. Observe isto na figura a seguir, à direita.



- (a) Quantas vezes o robô precisa virar à direita se  $x = 60^\circ$ ?
- (b) Quantas vezes o robô precisa virar à direita se  $x = 42^\circ$ ?
- (c) E se  $x = 47^\circ$ ?
7. Na figura vemos duas retas concorrentes. Determine as medidas dos ângulos  $x$  e  $y$ .



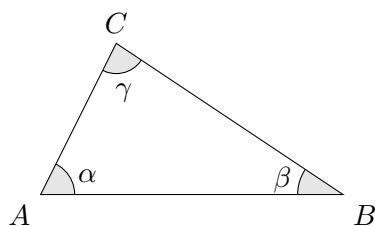
8. A **bissetriz** de um ângulo é a semirreta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que divide o ângulo em dois ângulos de mesma medida. Nas figuras a seguir, determine a medida do ângulo  $\alpha$  sabendo que os pontos  $A$ ,  $O$  e  $B$  estão alinhados e que a semirreta  $\overrightarrow{OP}$  é a bissetriz do ângulo  $B\hat{O}C$  (para estudar o conceito de bissetriz assista o [vídeo 7](#)).



9. Dois ângulos adjacentes somam  $136^\circ$ . Qual é a medida do ângulo formado pelas suas bissetrizes?
10. As bissetrizes de dois ângulos adjacentes formam um ângulo de  $52^\circ$ . Se um deles mede  $40^\circ$ , qual é a medida do outro ângulo?

### 5.3 Triângulos

Os segmentos de reta que unem três pontos não colineares  $A$ ,  $B$  e  $C$  formam um **triângulo**, que será indicado como o triângulo  $ABC$ .



Neste caso, os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os **vértices** e os segmentos  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$  são os **lados** do triângulo. Os ângulos  $\alpha = \hat{C}AB$ ,  $\beta = \hat{A}BC$  e  $\gamma = \hat{B}CA$  são os **ângulos internos** do triângulo.

Podemos classificar os triângulos de duas maneiras básicas: em relação aos comprimentos dos seus lados ou em relação às medidas dos seus ângulos internos. No que segue vamos apresentar simultaneamente estas

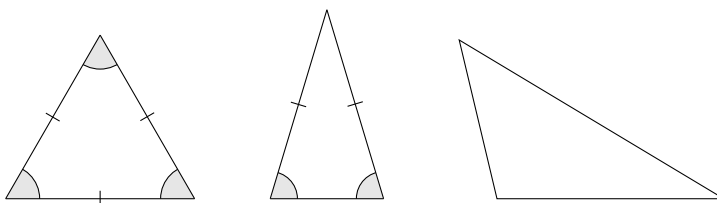
## ▲ 5.3 Triângulos

19

duas classificações (assista no [vídeo 14](#) uma explicação detalhada destas classificações).

- Um triângulo é **equilátero** se os seus três lados tiverem o mesmo comprimento. De modo equivalente, um triângulo é equilátero se os seus três ângulos internos tiverem a mesma medida.
- Um triângulo é **isósceles** se ele possuir pelo menos dois lados de mesmo comprimento. De modo equivalente, um triângulo é isósceles quando dois dos seus ângulos internos tiverem a mesma medida.
- Um triângulo é **escaleno** quando os seus três lados tiverem comprimentos diferentes. De modo equivalente, um triângulo é escaleno quando todos os seus ângulos internos tiverem medidas diferentes.

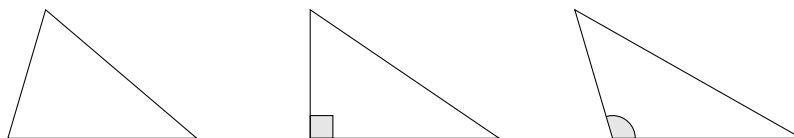
Na figura a seguir vemos, em ordem, um triângulo equilátero, um triângulo isósceles e um triângulo escaleno. Observe que no triângulo equilátero os três ângulos internos possuem a mesma medida e que no triângulo isósceles existem dois ângulos internos com mesma medida.



- Um triângulo é **acutângulo** quando todos os seus ângulos internos forem agudos.
- Um triângulo é **retângulo** quando possuir um ângulo interno reto, isto é, um ângulo interno de medida igual a  $90^\circ$ .

- Um triângulo é **obtusângulo** quando possuir um ângulo interno obtuso.

Na figura a seguir vemos, em ordem, um triângulo acutângulo, um triângulo retângulo e um triângulo obtusângulo.



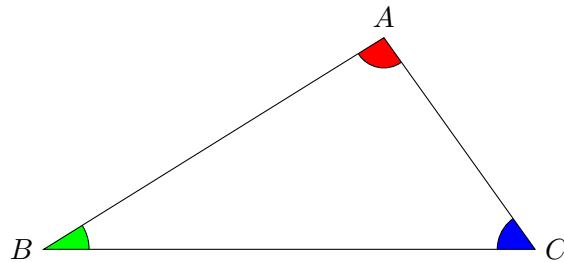
Se  $ABC$  é um triângulo isósceles com lados iguais  $\overline{AB} = \overline{AC}$ , dizemos que o lado  $BC$  é a **base** deste triângulo isósceles. Então se um triângulo isósceles possui dois lados iguais e um lado diferente, então este lado diferente é a base do triângulo. Entretanto, se um triângulo isósceles possui todos os lados iguais ele é um triângulo equilátero e neste caso qualquer um dos seus lados pode ser chamado de base. Observe que todo triângulo equilátero é um triângulo isósceles, mas nem todo triângulo isósceles é equilátero.

### Soma dos ângulos internos

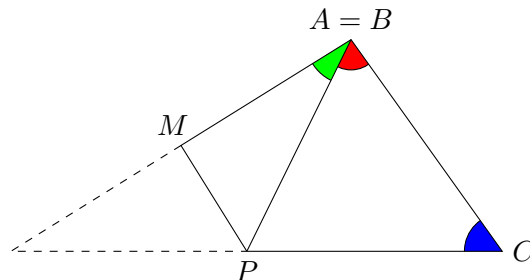
Vamos falar agora sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo. Para determinar formalmente o valor desta soma precisamos de resultados que somente serão estudados no próximo encontro presencial. Entretanto, como é importante saber o valor desta soma e como ela apresenta várias aplicações, vamos determinar o valor desta soma através de uma atividade de dobradura e vamos deixar a demonstração formal para o próximo encontro presencial. Até lá podemos ir nos familiarizando com o resultado e também podemos utilizá-lo na resolução de vários problemas.

▲ 5.3 Triângulos

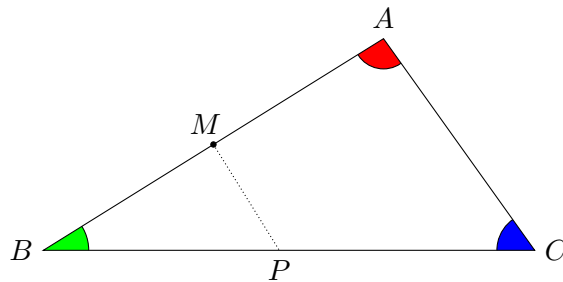
- Em uma folha de papel, utilizando uma régua desenhe um triângulo qualquer  $ABC$  e, para poder visualizar melhor, faça marcas de ângulos nos três cantos, como na ilustração a seguir. Não precisa imitar a ilustração, faça um triângulo do seu gosto e tamanho, mas não o faça muito pequeno.



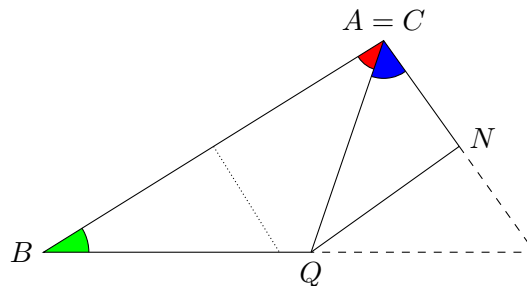
- Recorte o triângulo e pinte, dos dois lados do papel, cada ângulo de uma cor. A cor de um lado deve ser igual à cor do outro, como se a tinta atravessasse o papel.
- Faça a dobra  $MP$  de modo que o ponto  $B$  coincida com o ponto  $A$ , como está indicado na figura a seguir, Passando as pontas dos dedos exatamente sobre a dobra, marque o segmento  $MP$ .



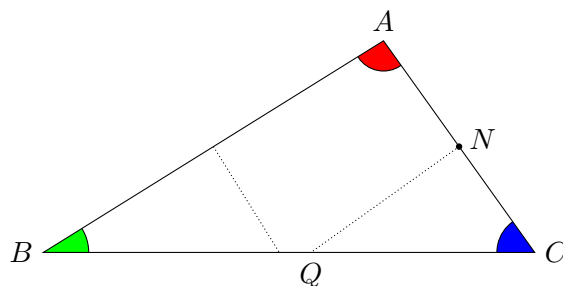
- Desdobre a folha, voltando a obter o triângulo  $ABC$ . Após desdobrar a folha, nela estará marcado o segmento  $MP$  perpendicular ao segmento  $AB$ , sendo  $M$  o ponto médio de  $AB$ .



- De modo análogo, faça a dobra  $NQ$  de modo que o ponto  $C$  coincida com o ponto  $A$ , como está indicado na figura a seguir. Passando as pontas dos dedos sobre a dobra, faça um vinco marcando o segmento  $NQ$ .



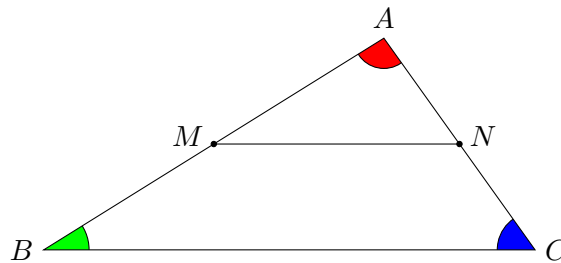
- Desdobre a folha, voltando a obter o triângulo  $ABC$ . Após desdobrar a folha, nela estará marcado o segmento  $NQ$  perpendicular ao segmento  $AC$ , sendo  $N$  o ponto médio de  $AC$ .



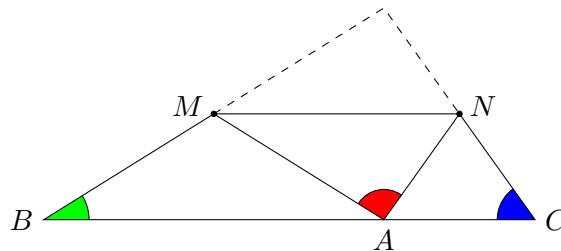
▲ 5.3 Triângulos

23

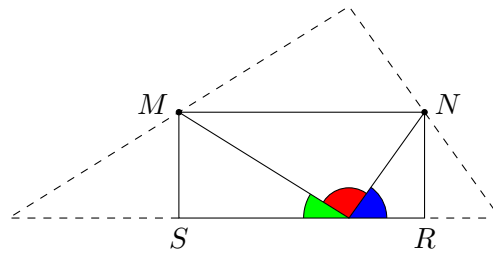
- Com o auxílio de uma régua, ligue os pontos  $M$  e  $N$ , como está ilustrado na figura a seguir.



- Dobre o seu triângulo sobre o segmento  $MN$  fazendo o ponto  $A$  se apoiar sobre o segmento  $BC$ . Fazendo isso, você vai obter uma figura como a seguir.



- Agora faça a dobra  $MS$  fazendo o ponto  $B$  coincidir com  $A$ . Em seguida faça a dobra  $NR$ , fazendo o ponto  $C$  coincidir com o ponto  $A$ . Você vai obter um retângulo  $MNRS$  como o que está ilustrado a seguir.



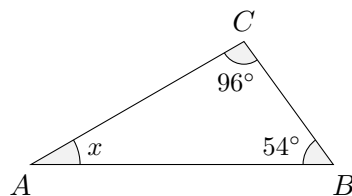
- Observe que os três ângulos do triângulo se juntaram formando ângulos adjacentes cuja soma é igual a um ângulo raso. Isto indica que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$ .

Enunciando formalmente, a atividade anterior sugere o seguinte teorema que será demonstrado no próximo encontro presencial.

**Teorema:** *A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$ .*

Vamos utilizar agora este resultado na solução de alguns exemplos.

**Exemplo 1:** Determine a medida do ângulo  $x$  do triângulo  $ABC$  da figura a seguir.



Solução. Como a soma dos ângulos de um triângulo é  $180^\circ$ , temos uma relação entre as três medidas destes ângulos. Daí, se são conhecidos dois ângulos de um triângulo, sempre é possível determinar a medida do



▲ 5.3 Triângulos

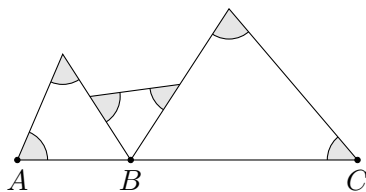
25

terceiro ângulo. No caso deste exemplo, podemos escrever a igualdade  $x + 54^\circ + 96^\circ = 180^\circ$ . Daí  $x = 180^\circ - 54^\circ - 96^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$ .

**Exemplo 2:** Cada um dos ângulos internos de um triângulo equilátero mede  $60^\circ$ .

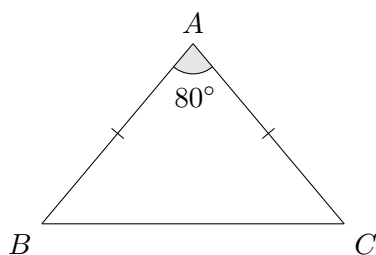
Solução. Com efeito, seja  $x$  a medida de cada um dos ângulos internos de um triângulo equilátero. Como a soma dos ângulos de um triângulo é  $180^\circ$ , temos que  $x + x + x = 180^\circ$  e, portanto,  $x = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$ .

**Exemplo 3: (OBMEP 2014 – N2Q3 – 1ª fase)** Na figura, os pontos  $A, B$  e  $C$  estão alinhados. Qual é a soma dos ângulos marcados em cinza?



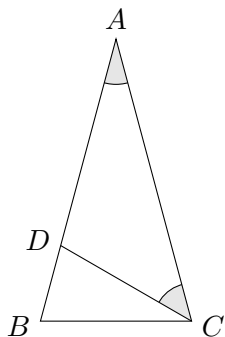
Solução. A soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ . Observe que os três ângulos não marcados dos triângulos (com vértices em  $B$ ) somam  $180^\circ$ , já que  $A, B$  e  $C$  estão alinhados. Para calcular a soma dos ângulos marcados podemos somar os ângulos internos dos três triângulos e, do valor desta soma, podemos subtrair  $180^\circ$ , que é a soma dos ângulos no vértice  $B$ . Assim, a soma dos ângulos marcados é  $(180^\circ \times 3) - 180^\circ = 360^\circ$ .

**Exemplo 4:** Na figura a seguir vemos um triângulo isósceles de base  $BC$ . Se  $\hat{C}AB = 80^\circ$ , calcule a medida dos ângulos da base deste triângulo isósceles.



Solução. Sabemos que em um triângulo isósceles os dois ângulos da base possuem a mesma medida. Se  $\alpha$  é a medida dos ângulos da base deste triângulo isósceles, então  $\alpha + \alpha + 80^\circ = 180^\circ$ . Daí,  $2\alpha = 100^\circ$  donde  $\alpha = 50^\circ$ .

**Exemplo 5:** (OBMEP 2005 – N2Q15 – 1ª fase) O triângulo  $ABC$  é isósceles de base  $BC$  e o ângulo  $\hat{BAC}$  mede  $30^\circ$ . O triângulo  $BCD$  é isósceles de base  $BD$ . Determine a medida do ângulo  $\hat{DCA}$ .



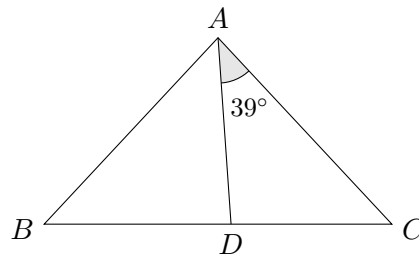
Solução. Sabemos que a soma dos três ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$ . Como o ângulo  $\hat{A}$  do triângulo  $ABC$  mede  $30^\circ$ , a soma das medidas dos ângulos  $\hat{ABC}$  e  $\hat{ACB}$  é  $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ . Por outro lado, como o triângulo é isósceles de base  $BC$ , os ângulos  $\hat{ABC}$  e  $\hat{ACB}$  são iguais, logo cada um deles mede  $150^\circ \div 2 = 75^\circ$ . Como o triângulo  $BCD$  é isósceles de base  $BD$ , temos  $\hat{BDC} = \hat{BCD} = 75^\circ$ . O mesmo

▲ 5.3 Triângulos

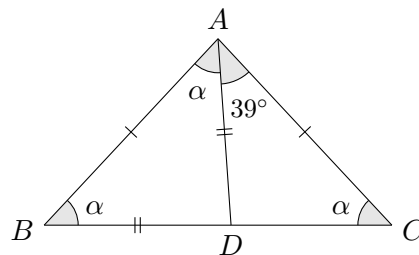
27

raciocínio usado acima mostra que  $D\hat{C}B = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$ . Segue que  $D\hat{C}A = A\hat{C}B - D\hat{C}B = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$ .

**Exemplo 6:** (Banco de Questões 2009 – Nível 1 – Lista 8 – Exercício 6) Encontre a medida do ângulo  $B\hat{A}D$ , sabendo que  $D\hat{A}C = 39^\circ$ ,  $AB = AC$  e  $AD = BD$ .

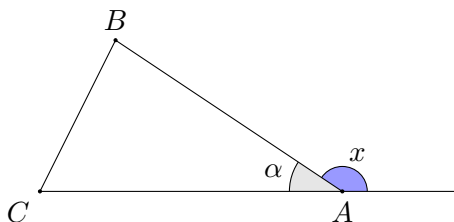


Solução. Como  $AB = AC$ , o triângulo  $ABC$  é isósceles, logo  $A\hat{B}C = A\hat{C}B$ . Sendo  $AD = BD$  o triângulo  $ABD$  também é isósceles, logo  $A\hat{B}D = B\hat{A}D$ . Temos então  $A\hat{B}C = A\hat{C}B = B\hat{A}D$ . Na figura a seguir, estes três ângulos iguais estão representados pela letra  $\alpha$ . Os ângulos internos do triângulo  $ABC$  são  $\alpha + 39^\circ$ ,  $\alpha$  e  $\alpha$ . Somando estes ângulos obtemos  $\alpha + 39^\circ + \alpha + \alpha = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha = 180^\circ - 39^\circ = 141^\circ \Rightarrow$  Assim  $\alpha = 47^\circ$ .

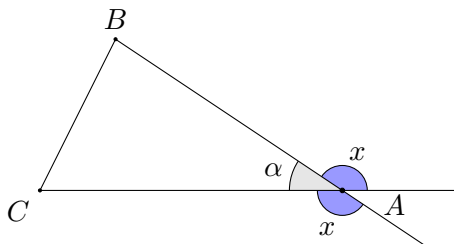


Ângulo externo

Nos exemplos anteriores exploramos a definição de ângulo interno e o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo. Vejamos agora que um triângulo também possui ângulos externos. De fato, seja  $ABC$  um triângulo com ângulo interno  $\alpha$  no vértice  $A$ . Em cada vértice do triângulo um **ângulo externo** é o ângulo formado entre um lado e o prolongamento do outro lado do triângulo que chega neste vértice. Na figura a seguir, por exemplo,  $x$  é ângulo externo no vértice  $A$ . Ele é o ângulo formado pelo lado  $AB$  e pelo prolongamento do lado  $AC$ .

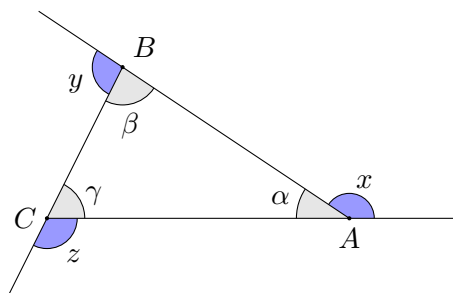


Observe que em cada vértice de um triângulo existem dois ângulos externos. Por exemplo, no vértice  $A$  do triângulo  $ABC$  podemos considerar o ângulo formado entre o lado  $AB$  e o prolongamento do lado  $AC$ , mas também podemos considerar o ângulo formado pelo lado  $AC$  e pelo prolongamento do lado  $AB$ . Estes dois ângulos externos são opostos pelo vértice e possuem, portanto, a mesma medida. Na figura a seguir vemos os dois ângulos externos  $x$  no vértice  $A$ .



▲ 5.3 Triângulos

Considere agora um triângulo  $ABC$  com ângulos internos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$  os ângulos externos desse triângulo nos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  (veja figura a seguir). A respeito do conceito de ângulo externo é importante observar as seguintes propriedades: (estude a definição de ângulo externo e estude explicações sobre estas propriedades no [vídeo 18](#)).

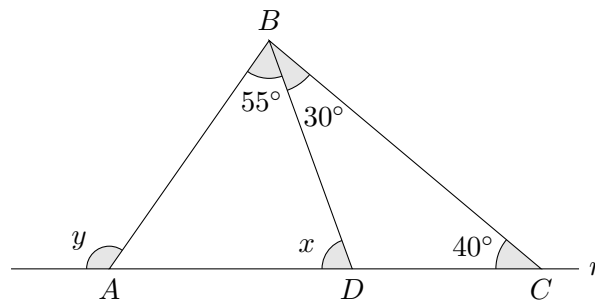


- Um ângulo externo é o suplementar do seu ângulo interno adjacente. Por exemplo, na figura anterior  $\alpha$  é ângulo interno e  $x$  é o seu ângulo externo adjacente. A soma  $\alpha + x$  é um ângulo raso e, portanto, esses ângulos são suplementares.
- Um ângulo externo é igual a soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele. De fato, utilizando a nomenclatura da figura anterior temos que  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  e que  $\alpha + x = 180^\circ$ . Daí  $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha = x$  e, portanto, o ângulo externo  $x$  é igual a soma dos ângulos internos não adjacentes  $\beta$  e  $\gamma$ .
- A soma dos ângulos externos de um triângulo é  $360^\circ$ . De fato, utilizando as propriedades anteriores e a notação da figura anterior temos que  $x = 180^\circ - \alpha$ ,  $y = 180^\circ - \beta$  e  $z = 180^\circ - \gamma$ . Daí a soma dos ângulos externos é

$$\begin{aligned} x + y + z &= (180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) \\ &= 540^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ. \end{aligned}$$

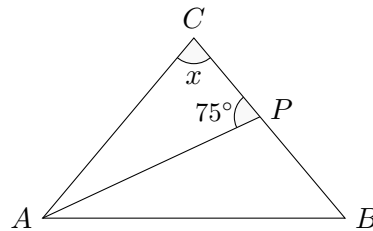
Vamos ver agora alguns exemplos de problemas resolvidos com o conceito de ângulo externo.

**Exemplo 7:** Na figura a seguir os pontos  $A$ ,  $D$  e  $C$  pertencem à reta  $r$ . Determine  $x$  e  $y$ .



Solução. O ângulo  $x$  é ângulo externo do triângulo  $BCD$  não adjacente aos ângulos internos de  $30^\circ$  e de  $40^\circ$ . Daí  $x = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$ . Do mesmo modo,  $y$  é ângulo externo do triângulo  $ABD$  não adjacente aos ângulos internos de  $55^\circ$  e de  $x = 70^\circ$ . Daí  $y = 55^\circ + x = 55^\circ + 70^\circ = 125^\circ$ .

**Exemplo 8:** Na figura a seguir,  $ABC$  é um triângulo isósceles de base  $AB$  e o segmento  $AP$  está sobre a reta bissetriz do ângulo  $C\hat{A}B$ . Se  $A\hat{P}C = 75^\circ$ , determine a medida do ângulo  $x$ .

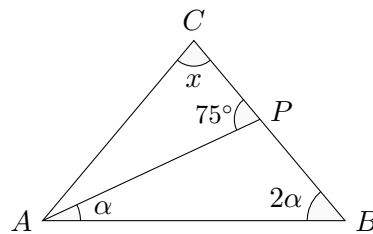


Solução. Seja  $2\alpha$  a medida do ângulo da base do triângulo  $ABC$ . Daí  $P\hat{A}B = \alpha$  e  $P\hat{B}A = 2\alpha$ . No triângulo  $PAB$  o ângulo de  $75^\circ$  é ângulo

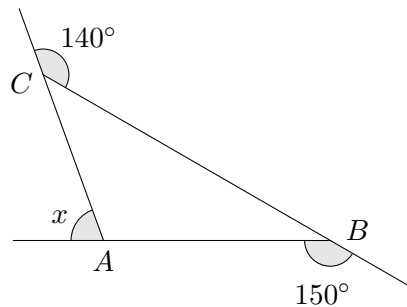
▲ 5.3 Triângulos

31

externo não adjacente aos ângulos internos de medidas  $\alpha$  e  $2\alpha$ . Daí  $\alpha + 2\alpha = 75^\circ$  e, portanto,  $\alpha = 25^\circ$ . Logo o triângulo  $ABC$  possui ângulos de  $50^\circ$  na sua base. Como a soma dos ângulos internos do triângulo  $ABC$  deve ser igual a  $180^\circ$ , concluímos que  $x = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ$ .

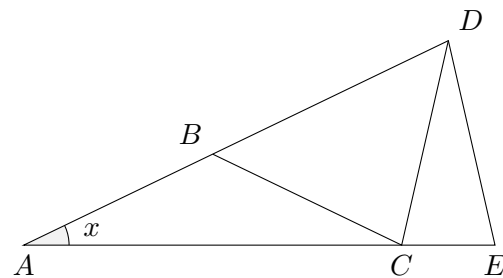


**Exemplo 9:** Dados os ângulos externos de  $140^\circ$  e  $150^\circ$  do triângulo  $ABC$ , calcule o ângulo externo  $x$ .



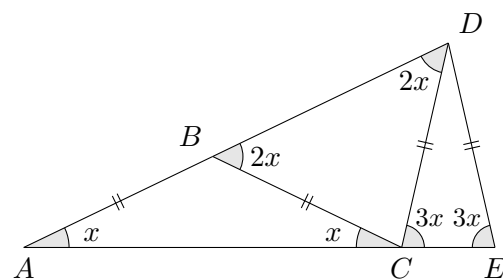
Solução. Sabemos que a soma dos ângulos externos de qualquer triângulo é igual a  $360^\circ$ . Daí podemos concluir que  $x + 140^\circ + 150^\circ = 360^\circ$  e daí  $x = 70^\circ$ .

**Exemplo 10:** Na figura a seguir,  $ADE$  é um triângulo isósceles de base  $DE$ . Além disso,  $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}$ . Calcule a medida do ângulo  $x = \widehat{DAE}$ .



Solução.

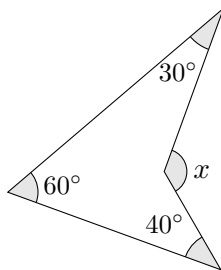
- Como o triângulo  $ABC$  é isósceles,  $\hat{ACB} = x$ .
- Como o ângulo  $D\hat{B}C$  é ângulo externo do triângulo  $ABC$  ele é a soma dos ângulos internos não adjacentes. Portanto,  $D\hat{B}C = x + x = 2x$ .
- Como o triângulo  $DBC$  é isósceles,  $B\hat{D}C = 2x$ .
- Como o ângulo  $D\hat{C}E$  é ângulo externo do triângulo  $DAC$  ele é a soma dos ângulos internos não adjacentes e, portanto,  $D\hat{C}E = x + 2x = 3x$ .
- Como o triângulo  $DCE$  é isósceles,  $D\hat{E}C = 3x$ .
- Como o triângulo  $ADE$  é isósceles,  $A\hat{D}E = A\hat{E}D = 3x$ . Daí podemos concluir que  $C\hat{D}E = x$ .



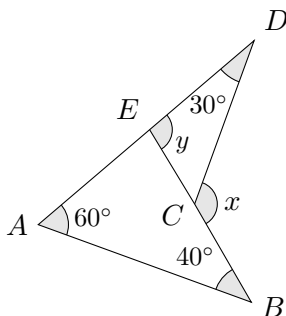


- Somando os ângulos internos do triângulo  $ADE$  obtemos  $x + 3x + 3x = 180^\circ$ . Daí segue que  $7x = 180^\circ$  ou seja  $x = \frac{180^\circ}{7} \simeq 25,7^\circ$ .

**Exemplo 11:** Dados os ângulos da figura, determine a medida do ângulo  $x$ .



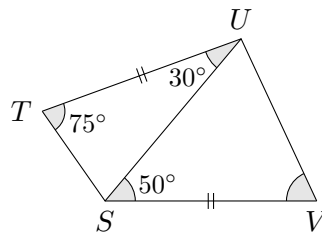
Solução. Vamos denotar por  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  os vértices do quadrilátero da figura dada. Prolongando o lado  $BC$ , como ilustrado a seguir, formamos o ângulo  $y$  que é ângulo externo do triângulo  $ABE$  não adjacente aos ângulos internos de  $60^\circ$  e de  $40^\circ$ . Daí  $y = 60^\circ + 40^\circ = 100^\circ$ . Considerando o triângulo  $CDE$ ,  $x$  é ângulo externo não adjacente aos ângulos internos de  $30^\circ$  e de  $y = 100^\circ$ . Daí  $x = 30^\circ + 100^\circ = 130^\circ$ .



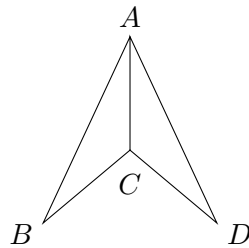
Portanto,  $x$  é igual a soma dos três ângulos internos dados, ou seja,  $x = 30^\circ + 40^\circ + 60^\circ$ .

**Exercícios:**

1. Mostre que um triângulo possui no máximo um ângulo obtuso.
2. (Banco de Questões 2010 – Nível 2 – questão 69) Na figura dada,  $TU = SV$ . Quanto vale o ângulo  $S\hat{V}U$ , em graus?



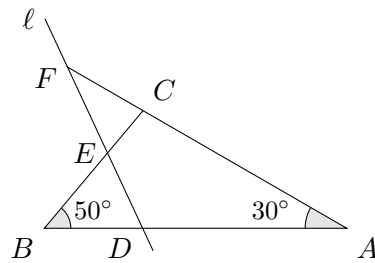
3. (Banco de Questões 2011 – Nível 1 – questão 13) Na figura a seguir temos dois triângulos,  $ABC$  e  $ADC$  tais que  $AB = AD$  e  $CB = CD = CA$ . Sabendo que  $C\hat{B}A = 25^\circ$  determine a medida do ângulo  $B\hat{C}D$ .



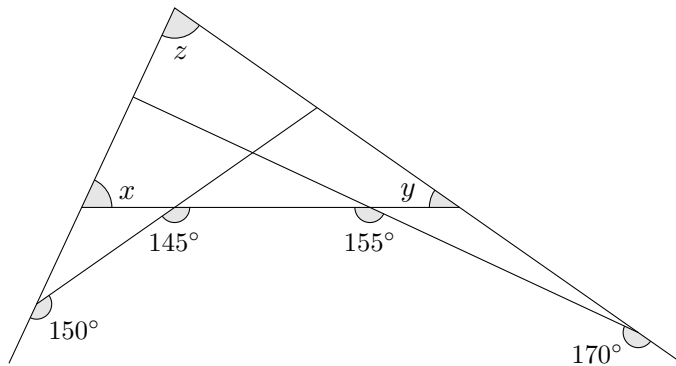
4. (Banco de Questões 2011 – Nível 2 – questão 18) Seja  $ABC$  um triângulo com  $B\hat{A}C = 30^\circ$  e  $A\hat{B}C = 50^\circ$ . A reta  $\ell$  corta os lados  $AB$ ,  $BC$  e o prolongamento de  $AC$  em  $D$ ,  $E$  e  $F$ , respectivamente. Se o triângulo  $DBE$  é isósceles, quais são as três possíveis medidas para o ângulo  $C\hat{F}E$ ?

▲ 5.3 Triângulos

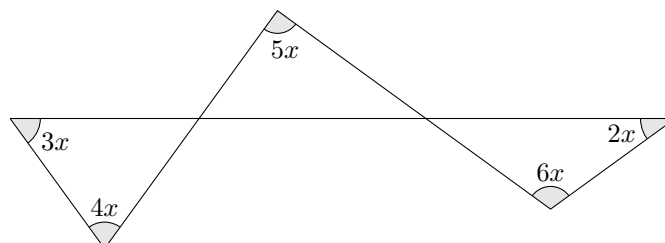
35



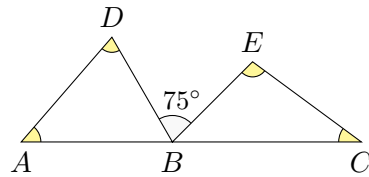
5. Dados os ângulos  $150^\circ$ ,  $145^\circ$ ,  $155^\circ$  e  $170^\circ$  indicados na figura, determine as medidas dos ângulos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .



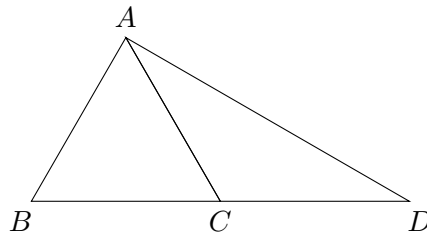
6. (Banco de Questões 2010 – Nível 2 – questão 37) Na figura estão indicadas, em graus, as medidas de alguns ângulos em função de  $x$ . Quanto vale  $x$ ?



7. Na figura a seguir os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  estão alinhados e  $\widehat{DBE} = 75^\circ$ . Calcule a soma dos ângulos  $\widehat{A} + \widehat{D} + \widehat{E} + \widehat{C}$ .



8. Na figura a seguir, o triângulo  $ABC$  é equilátero e o triângulo  $ACD$  é isósceles. Determine o menor ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos  $\widehat{ABD}$  e  $\widehat{BAD}$ .



9. (Banco de Questões 2010 – Nível 2 – questão 8) Na figura, temos  $\widehat{B} = 50^\circ$ , sendo  $AD$  e  $CD$  as bissetrizes dos ângulos  $\widehat{A}$  e  $\widehat{C}$  do triângulo  $ABC$ , respectivamente. Qual é a medida do ângulo  $\widehat{ADC}$ ?

