Aula 1 – 2º Encontro

Critério de Divisibilidade

30/07/2016

1) Para obter o maior número possível, devemos ter o maior número possível de algarismos iguais a 5 à esquerda. Para isso podemos tirar a sequencia inicial 1234, deixando um 5, depois retirar a próxima sequencia 1234.

$$\color{red}{1\ 2\ 3\ 4}\ 5\ \color{red}{1\ 2\ 3\ 4}\ 5\ \color{red}{1\ 2}\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5$$

É claro que se tivéssemos deixado um algarismo diferente de 5 à esquerda, o número seria menor. Entretanto, não podemos obter outro 5, já que só podemos retirar mais dois algarismos. Então, retiramos os dois próximos pequenos: 1 e 2.

Logo o resultado

$$5\ 5\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5$$

2) Observe que o número 72 é divisível por 8 e por 9, pois:

$$72 = 2^3 . 3^2 = 8 . 9$$

Logo um número é divisível por 72 se for divisível por 8 e por 9.

Pelo critério da divisibilidade por 8, o número 17* tem que ser divisível por 8.

Note que o único algarismo que funciona é o 6, pois

$$\frac{176}{8} = 22$$

Pelo critério da divisibilidade por 9, a soma dos algarismos do número $32 * 357176$ tem que ser divisível por 9, logo

$$3 + 2 + * + 3 + 5 + 7 + 1 + 7 + 6 = 34 + *$$

Assim o algarismo que falta é 2

Portanto o número é 322357176.

3) Os dois amigos nasceram no mesmo mês e ano, com uma diferença de 7 dias, de modo que um nasceu no dia $d/m/a$ e o outro no dia $(d+7)/m/a$.

Com estas datas formamos os números $(d)(m)(a)$ e $(d+7)(m)(a)$.

Observe que

$$(d+7)(m)(a) = (d)(m)(a) + 7\ \times 10^k,$$

Onde k é o número de algarismos de (m)(a).

Observe que só podemos ter $k = 3$, se o mês m tem um algarismo, ou $k = 4$, se o mês tem dois algarismos.

Exemplo: Seja d=10, m=11 e a=12, logo

$$(10+7)(11)(12) = (10)(11)(12) + 7\ \times 10^k$$
$$171112 = 101112 + 7\ \times 10^4$$

Sabendo que um desses números é o sêxtuplo do outro temos:

$$(d+7)(m)(a) = 6 \times (d)(m)(a) \Rightarrow$$

$$(d)(m)(a) + 7\ \times 10^k = 6 \times (d)(m)(a) \Rightarrow$$

$$7\ \times 10^k = 6 \times (m)(a) - (d)(m)(a) \Rightarrow$$

$$7\ \times 10^k = 5 \times (d)(m)(a)$$

1ºCaso: k=3

$$(d)(m)(a) = \frac{7\ \times 10^3}{5} = 1400$$

Isto é, d=1, m=4 e a=00, ou seja, 1º de Abril de 1900

2ºCaso: k=4

$$(d)(m)(a) = \frac{7\ \times 10^4}{5} = 14000,$$

que não é uma data válida, pois não existe o mês 0.

Portanto a data de nascimento do amigo mais velho é 1º de Abril de 1900

4) Primeiramente observe o caso mais simples escolhendo os algarismos $1{,}2\ e\ 3$. Podemos formar os números $12, 13, 21, 23, 31\ e\ 32$.

A soma destes números é $12 + 13 + 21 + 23 + 31 + 32 = 132$ e a soma dos algarismos é $1 + 2 + 3 = 6$.

Observe que o resultado enunciado é verdadeiro pois $22 \times 6 = 132$

Olhando para o caso geral:

Supondo que os algarismos escolhidos sejam $a, b\ e\ c$.

Com estes algarismos formamos os números de 2 algarismos:

$$ab = a \times 10 + b$$
$$ac = a \times 10 + \mathrm{c}$$
$$ba = b \times 10 + a$$
$$bc = b \times 10 + c$$
$$ca = c \times 10 + \mathrm{a}$$
$$cb = c \times 10 + b$$

Somando estes números, somando os lados esquerdos e os lados direitos, obtemos:

$$ab + ac + ba + bc + ca + cb = 22a + 22b + 22c = 22(a + b + c)$$

5)

O menor número de dois algarismos é 10;

O maior número de dois algarismos é 99;

A quantidade total de números de dois algarismos é de 10 à 99, que são exatamente 90 números.

Assim temos 90 números com dois algarismos cada.

Isto é, $90 \times 2 = 180$ algarismos no total.

6)

Observe que existem 75 números no conjunto $\{1,2,3,\ldots,75\}$ e que existem 29 números no conjunto $\{1,2,3,\ldots,29\}$

Fazendo a diferença, concluímos que existem

$$75-29=46$$

números no conjunto $\{30,31,32,\ldots,75\}$

7)

- Das páginas de 1 até 9 são utilizados 9 algarismos.
- Das páginas 10 até 99 existem 90 números.

Observe:

✓ o conjunto $\{10,11,12,13,14,15,16,17,18,19\}$ possui 10 números;

✓ o conjunto $\{20,21,22,23,24,25,26,27,28,29\}$ possui 10 números;

Analogamente..

✓ o conjunto $\{90,91,92,93,94,95,96,97,98,99\}$ possui 10 números;

Totalizando neste conjunto 90 números de 2 algarismos, isto é,

$$90 \times 2 = 180$$

- Seguindo o mesmo raciocínio para numerar as páginas de 100 a 300 são necessários 201 números de três algarismos cada, totalizando

$3 \times 201 = 603$ algarismos.

Portanto para numerar as 300 páginas do livro são necessários $9 + 180 + 603 = 792$ algarismos

8)

a) 1260

$$1260 = 1 \times 1000 + 2 \times 100 + 6 \times 10 + 0$$

Observe que

- É divisível por 2;

Temos que $1000 = 2 \times 500$, $100 = 2 \times 50$, $10 = 2 \times 5$, então

$$\begin{aligned} 1260 &= 1 \times 2 \times 500 + 2 \times 2 \times 50 + 6 \times 2 \times 5 + 0 \\ &= 2(500 + 2 \times 50 + 6 \times 5) = 2(500 + 100 + 30) = 2 \times 630 \end{aligned}$$

- É divisível por 3;

Temos que $1000 = 3 \times 333 + 1$, $100 = 3 \times 33 + 1$, $10 = 3 \times 3 + 1$, então

$$\begin{aligned} 1260 &= 1 \times (3 \times 333 + 1) + 2 \times (3 \times 33 + 1) + 6 \times (3 \times 3 + 1) \\ &= 3(333 + 2 \times 33 + 6 \times 3) + (1 + 2 + 6) \\ &= 3(333 + 66 + 18) + (3 \times 3) = 3 \times (417 + 3) \end{aligned}$$

- É divisível por 4;

Temos que $1000 = 4 \times 250$, $100 = 4 \times 25$, então

$$1260 = 1 \times 4 \times 250 + 2 \times 4 \times 25 + 60 = 4(250 + 2 \times 25) + 60$$

Como $4(250 + 2 \times 25)$ é divisível por 4, é suficiente analisar o número 60

$$60 = 4 \times 15$$

E portanto $1260 = 4(250 + 2 \times 25) + 4 \times 15 = 4(250 + 50 + 15)$

- É divisível por 5;

Temos que $1000 = 5 \times 200$, $100 = 5 \times 20$, $10 = 5 \times 2$ então

$$\begin{aligned} 1260 &= 1 \times 5 \times 200 + 2 \times 5 \times 20 + 6 \times 5 \times 2 \\ &= 5(200 + 2 \times 20 + 6 \times 2) \end{aligned}$$

- É divisível por 6;

Observe que $6 = 2 \times 3$, logo um número é divisível por 6 se é divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo. E como já vimos 1260 é divisível por 2 e por 3.

Portanto 1260 é divisível por 6.

- É divisível por 9;

Temos que $1000 = 9 \times 111 + 1$, $100 = 9 \times 11 + 1$, $10 = 9 \times 1 + 1$, então

$$\begin{aligned} 1260 &= 1 \times (9 \times 111 + 1) + 2 \times (9 \times 11 + 1) + 6 \times (9 \times 1 + 1) \\ &= 9(111 + 2 \times 11 + 6 \times 1) + (1 + 2 + 6) \\ &= 9(111 + 22 + 6) + (9 \times 1) = 9 \times (139 + 1) \end{aligned}$$

- É divisível por 10;

Temos que $1000 = 10 \times 100$, $100 = 10 \times 10$, então

$$\begin{aligned} 1260 &= 1 \times (10 \times 100) + 2 \times (10 \times 10) + 6 \times 10 \\ &= 10(100 + 2 \times 10 + 6) = 10(100 + 20 + 6) \end{aligned}$$

b) 1746

- É divisível por 2, pois é par;
- É divisível por 3, pois a soma de seus algarismos é um número divisível por 3;
- Não é divisível por 4, pois $46 = 4 \times 11 + 2$, logo 46 não é divisível por 4;
- Não é divisível por 5, pois não termina em 0 ou 5;
- É divisível por 6, pois é divisível ao mesmo tempo por 2 e por 3;
- É divisível por 9, pois a soma de seus algarismos é divisível por 9;
- Não é divisível por 10, pois não termina em 0.

c) 2210505

- Não é divisível por 2, pois não é par;
- É divisível por 3, pois a soma de seus algarismos é um número divisível por 3;
- Não é divisível por 4, pois $05 = 4 \times 1 + 1$, logo 05 não é divisível por 4;
- É divisível por 5, pois termina em 5;
- Não é divisível por 6, pois não é divisível por 2;
- Não é divisível por 9, pois a soma de seus algarismos não é divisível por 9;
- Não é divisível por 10, pois não termina em 0.

9) Como o número deve ser divisível por 9, a soma dos algarismos deve ser divisível por 9. por outro lado, como todos os algarismos são pares, a soma dos algarismos também é par.

- $9 \times 0 = 0(par), \{9 + 0; 8 + 1 + 7 + 2; 6 + 3; 5 + 4\}$=$\{par + ímpar\}$
- $9 \times 1 = 9(ímpar)$
- $9 \times 2 = 18(par), \{9 + 9\} = \{ímpar + ímpar\}$, observe que o menor múltiplo de 9 com a soma igual a 18 é 99, mas seus algarismos são ímpares. Isto implica que o número deve ter 3 algarismos, o primeiro algarismo deve ser no mínimo 2. Neste caso, a soma dos outros dois algarismos é igual a 16 e como são pares a única possibilidade é $8 + 8 = 16$.
- Assim, $2 + 8 + 8 = 18$

Portanto $288 = 9 \times 32$ é o menor múltiplo de 9 com todos os algarismos pares.

10) O quadrado perfeito é um número da forma $\boldsymbol{a^2}$, isto é,

$$\text{Se } \boldsymbol{a} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{a^2} = 1^2 = 1$$

$$\text{Se } \boldsymbol{a} = 2 \Rightarrow \boldsymbol{a^2} = 2^2 = 4$$

$$\text{Se } \boldsymbol{a} = 3 \Rightarrow \boldsymbol{a^2} = 3^2 = 9$$

$$\text{Se } \boldsymbol{a} = 4 \Rightarrow \boldsymbol{a^2} = 4^2 = 16$$

$$\text{Se } \boldsymbol{a} = 5 \Rightarrow \boldsymbol{a^2} = 5^2 = 25$$

$$\text{Se } \boldsymbol{a} = 6 \Rightarrow \boldsymbol{a^2} = 6^2 = 36$$

$$\text{Se } \boldsymbol{a} = 7 \Rightarrow \boldsymbol{a^2} = 7^2 = 49$$

$$\text{Se } \boldsymbol{a} = 8 \Rightarrow \boldsymbol{a^2} = 8^2 = 64$$

$$\text{Se } \boldsymbol{a} = 9 \Rightarrow \boldsymbol{a^2} = 9^2 = 81$$

$$\text{Se } \boldsymbol{a} = 10 \Rightarrow \boldsymbol{a^2} = 10^2 = 100$$

Ou seja, os números

$$\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, \dots, a^2\}$$

são quadrados perfeitos.

Observe os algarismos das unidades em vermelho:

$$\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, \dots, a^2\}$$

Logo, podemos notar que o algarismo da casa da unidade sempre será

$$\{0, 1, 4, 5, 6 \; ou \; 9\}.$$

11) Seja dado um número n escrito no sistema decimal como

$$n = n_r \dots n_1 n_0 = n_r 10^r + \cdots + n_1 10 + n_0$$

Podemos então escrever

$$n = (n_r 10^{r-1} + \cdots + n_1)10 + n_0,$$

Onde n_0 é o algarismo das unidades de n.

- Se $n_0 = 0$, temos

$$\begin{aligned} n &= (n_r 10^{r-1} + \cdots + n_1)10 + 0 = (n_r 10^{r-1} + \cdots + n_1) \times 5 \times 2 \\ &= 2[5 \times (n_r 10^{r-1} + \cdots + n_1)] = 2m \end{aligned}$$

- Se $n_0 = 2$, temos

$$\begin{aligned} n &= (n_r 10^{r-1} + \cdots + n_1)10 + 2 = (n_r 10^{r-1} + \cdots + n_1) \times 5 \times 2 + 2 \\ &= 2[5 \times (n_r 10^{r-1} + \cdots + n_1) + 1] = 2m \end{aligned}$$

- Se $n_0 = 4$, temos

$$\begin{aligned} n &= (n_r 10^{r-1} + \cdots + n_1)10 + 4 \\ &= (n_r 10^{r-1} + \cdots + n_1) \times 5 \times 2 + (2 \times 2) \\ &= 2[5 \times (n_r 10^{r-1} + \cdots + n_1) + 2] = 2m \end{aligned}$$

- Se $n_0 = 6$, temos

$$\begin{aligned} n &= (n_r 10^{r-1} + \cdots + n_1)10 + 6 \\ &= (n_r 10^{r-1} + \cdots + n_1) \times 5 \times 2 + (2 \times 3) \\ &= 2[5 \times (n_r 10^{r-1} + \cdots + n_1) + 3] = 2m \end{aligned}$$

- Se $n_0 = 8$, temos

$$\begin{aligned} n &= (n_r 10^{r-1} + \cdots + n_1)10 + 8 \\ &= (n_r 10^{r-1} + \cdots + n_1) \times 5 \times 2 + (2 \times 4) \\ &= 2[5 \times (n_r 10^{r-1} + \cdots + n_1) + 4] = 2m \end{aligned}$$

Portanto para o algarismo das unidades igual a 0, 2, 4, 6 ou 8 podemos verificar que o número n é da forma 2m(par).

12)

- **17**

Não é múltiplo de 2, pois é ímpar;

Não é múltiplo de 5, pois não termina em 0 ou 5;

Não é múltiplo de 10, pois não termina em 0;

- **22**

É múltiplo de 2, pois é par;

Não é múltiplo de 5, pois não termina em 0 ou 5;

Não é múltiplo de 10, pois não termina em 0;

- **25**

Não é múltiplo de 2, pois é ímpar;

É múltiplo de 5, pois termina em 5;

Não é múltiplo de 10, pois não termina em 0;

- **28**

É múltiplo de 2, pois é par;

Não é múltiplo de 5, pois não termina em 0 ou 5;

Não é múltiplo de 10, pois não termina em 0;

- **30**

É múltiplo de 2, pois é par;

É múltiplo de 5, pois termina em 0;

É múltiplo de 10, pois termina em 0;

- **35420**

Não é múltiplo de 2, pois é ímpar;

Não é múltiplo de 5, pois não termina em 0 ou 5;

Não é múltiplo de 10, pois não termina em 0;

- **35420**

É múltiplo de 2, pois é par;

É múltiplo de 5, pois termina em 0;

É múltiplo de 10, pois termina em 0;

- **523475**

Não é múltiplo de 2, pois é ímpar;

É múltiplo de 5, pois termina em 5;

Não é múltiplo de 10, pois não termina em 0;