Encontros de Geometria

Hotel de Hilbert – Grupo G1,1 – N1M1

Luciana Cadar
Francisco Dutenhefner

Encontros de Geometria – Parte 1

Estrada Dona Castorina, 110 – Rio de Janeiro – 22460-320

Capa: Ampersand Comunicação Gráfica

Cadar, Luciana
Dutenhefner, Francisco
Encontros de Geometria - Parte 1
Rio de Janeiro, IMPA, 2015
156 páginas
ISBN 978-85-244-0396-5

Distribuição
IMPA/OBMEP
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
E-mail: cad_obmep@obmep.org.br
www.obmep.org.br

Texto já revisado pela nova ortografia

Sumário

Introdução

Todos os medalhistas da OBMEP são convidados a participar, por aproximadamente um ano, de um Programa de Iniciação Científica Júnior (PIC). Este Programa é realizado desde a primeira edição da OBMEP em 2005 e, a partir de 2008, ele é constituído de uma parte presencial e de uma parte virtual na qual são desenvolvidas atividades específicas para cada nível e cada multiplicidade de participação do aluno no PIC.

A parte presencial do PIC é constituída de 10 encontros e é realizada por meio de uma rede nacional de professores em polos distribuídos no país, situados em escolas e universidades. Em cada um desses encontros presenciais o aluno é apresentado a um conteúdo interessante, importante e motivador. Para os alunos do grupo G1,1 (Nível 1 e que estão participando pela primeira vez do PIC), são realizados 4 encontros sobre Aritmética, 4 encontros sobre Geometria e 2 encontros sobre Contagem.

Na parte virtual, os alunos têm a oportunidade de participar do Hotel de Hilbert, um Fórum contínuo no qual são aprofundadas as discussões iniciadas nos encontros presenciais, onde os alunos podem interagir com os colegas e o Moderador de Fórum sobre as soluções de vários problemas e os conceitos matemáticos introduzidos em cada encontro presencial.

Cada encontro presencial e todas as atividades do Fórum seguem um planejamento cuidadosamente elaborado para cada nível e cada multiplicidade de participação do aluno no PIC.

Para o módulo de Aritmética, a apostila Encontros de Aritmética, disponível na página da OBMEP, resume os conteúdos e apresenta exemplos resolvidos e exercícios propostos para os quatro encontros de Aritmética do grupo G1,1. Em resumo, a programação desses encontros é a seguinte:

ENCONTRO 1

Paridade; Sistema posicional de numeração; Base binária: problemas de pesagens com balanças; Curiosidades.

ENCONTRO 2

Divisão Euclidiana; Fenômenos periódicos; Aritmética dos restos; Múltiplos e divisores; Fatoração; Critérios de divisibilidade.

ENCONTRO 3

Máximo divisor comum; Mínimo múltiplo comum; Cálculo do *mdc* e do *mmc* dada a fatoração; Cálculo do *mdc* e do *mmc* por meio de uma fatoração simultânea; Aplicações.

ENCONTRO 4

Algoritmo de Euclides para o cálculo do *mdc*; Propriedades.

Terminado o módulo de Aritmética, os alunos do grupo G1,1 realizam quatro encontros presenciais sobre Geometria Euclidiana Plana: Encontro 5, Encontro 6, Encontro 7 e Encontro 8. Nesses encontros são apresentadas as definições básicas da Geometria e os principais resultados compatíveis com o nível de escolaridade dos alunos do grupo G1,1. O planejamento, os conteúdos, exemplos resolvidos e exercícios propostos para este estudo da Geometria estão reunidos nesta apostila.

É importante observar que esta apostila não tem o objetivo de ser um material didático completo em que um assunto é minuciosamente apresentado nem é totalmente esgotado. Com ela temos como objetivo colocar nas mãos dos alunos participantes do PIC um material orientador de apoio às aulas presenciais e às atividades do Fórum. Você também vai observar que muitos dos problemas apresentados não estão acompanhados de soluções, pois a aula presencial do PIC e o Hotel de Hilbert são os locais adequados para as discussões desses problemas.

Para os Professores Orientadores e para os Moderadores, esta apostila orienta as atividades das aulas presenciais e as atividades de Fórum, observando que no seu contexto regional, com a sua experiência didática e conhecimento da turma, o Professor Orientador deve fazer os ajustes necessários, lembrando que a aula presencial é o início da discussão de um conteúdo que continuará no Hotel de Hilbert. O Moderador de Fórum, dentro destes direcionamentos, deve criar um ambiente de aprendizagem interessante e motivador, incentivando a participação de todos os alunos na discussão da teoria e dos exercícios propostos. Para os alunos do PIC, esta apostila, com exercícios organizados por temas, é o material de estudo diário referente ao estudo do módulo de Geometria.

Na página da internet da OBMEP está disponibilizada uma variedade enorme de materiais: apostilas, bancos de questões e provas anteriores. Nesta apostila articulamos parte desses materiais por temas e, desse modo, o estudo proposto está baseado na solução de problemas que já foram questões de provas da OBMEP ou de exercícios que estão propostos nos bancos de questões. Além disso, no canal PICOBMEP no YouTube e no Portal da Matemática estão disponibilizadas diversas videoaulas sobre os mais variados assuntos. Em muitos momentos desta apostila, em vez de esgotar uma explicação, preferimos fazer um *link* para uma destas videoaulas, para que o aluno possa ver uma exposição dinâmica e bem mais detalhada do que ele está lendo na apostila. Deste modo, recomendamos fortemente que o estudo da apostila seja realizado em paralelo com o estudo dos vídeos indicados. Bons estudos!

ENCONTRO 5

Neste primeiro encontro do módulo de Geometria serão apresentados os conceitos e os resultados mais básicos envolvidos na construção da Geometria. A teoria será apresentada sequencialmente, de um modo mais intuitivo, sem um formalismo exagerado, em que assumiremos implicitamente alguns fatos básicos. Posteriormente, avançando no PIC, os alunos poderão voltar para aprofundar mais o estudo do método axiomático da construção da Geometria Euclidiana Plana.

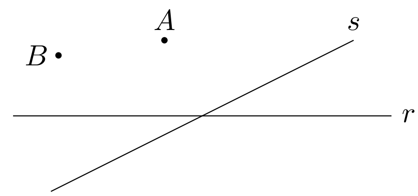
Neste encontro, os assuntos que serão trabalhados são:

Assuntos	**Vídeos de Geometria: PICOBMEP no YouTube**
Ponto, reta, segmentos, medidas de segmentos, ponto médio, semirretas, posição relativa de pontos e retas.	1, 2, 3
Ângulos, medidas de ângulos, ângulos retos, agudos e obtusos, ângulos consecutivos e adjacentes, ângulos complementares, suplementares e opostos pelo vértice.	5, 6, 7, 8, 9
Triângulos, elementos e classificação de triângulos: escaleno, isósceles, equilátero, retângulo, acutângulo e obtusângulo, soma dos ângulos internos de um triângulo, ângulo externo e o teorema do ângulo externo, soma dos ângulos externos, propriedades dos triângulos isósceles e equiláteros.	14, 18, 25, 26
Quadriláteros, definições e propriedades dos quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios.	29, 30, 31, 33, 36

5.1 Conceitos básicos

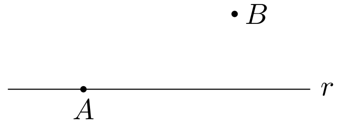
Antes de começar, gostaríamos de observar que todas as definições apresentadas nesta seção podem ser estudadas no vídeo 1, no vídeo 2 e no vídeo 3 da parte de Geometria do canal PICOBMEP no YouTube. Recomendamos que o estudo da apostila seja realizado juntamente com o estudo destes vídeos, pois eles enriquecem em muito as explicações apresentadas aqui.

Os conceitos de **ponto**, **reta** e **plano** não são definidos. Compreendemos estes conceitos a partir de um entendimento comum utilizado cotidianamente dentro e fora do ambiente escolar.

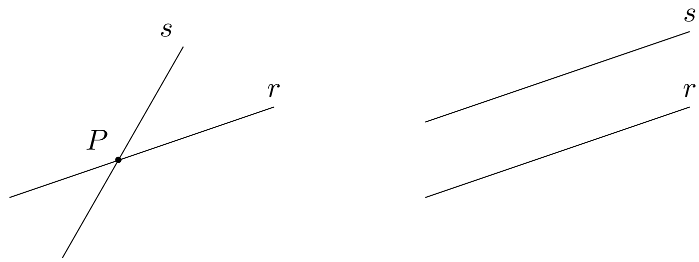


Na figura anterior vemos dois pontos A e B e duas retas r e s. Geralmente é utilizada esta notação: letras maiúsculas para pontos e letras minúsculas para retas.

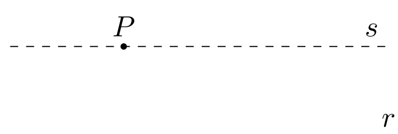
Uma reta é um conjunto de pontos. Dados uma reta r e um ponto P, ou o ponto pertence à reta ou o ponto não pertence à reta. Quando o ponto P pertence à reta r escrevemos $P \in r$. Quando o ponto P não pertence à reta r escrevemos $P \notin r$. Na figura a seguir, $A \in r$ e $B \notin r$.



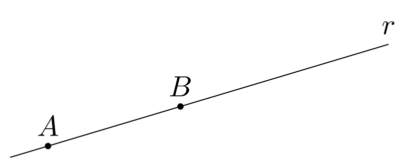
Se são dadas duas retas distintas no plano, ou elas possuem um único ponto em comum, ou elas não possuem ponto algum em comum. No primeiro caso elas são chamadas de **concorrentes** e no segundo caso elas são **paralelas**. Na figura a seguir vemos, do lado esquerdo, duas retas concorrentes no ponto P e, do lado direito, duas retas paralelas r e s (estude estes conceitos no vídeo 4).



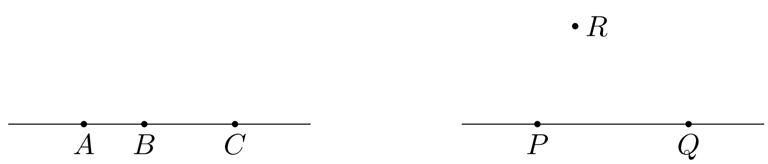
Dada uma reta r e dado um ponto $P \notin r$, existe uma única reta s paralela à reta r passando por P. Este fato é conhecido como o **Axioma das Paralelas**.



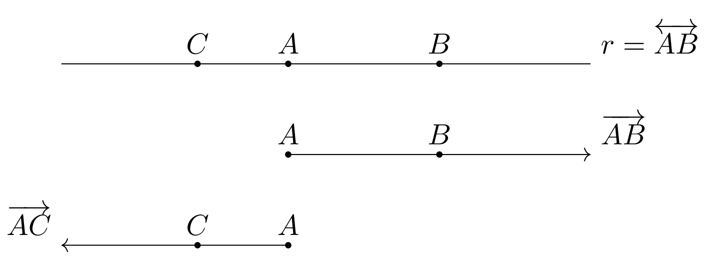
Dados dois pontos distintos no plano podemos traçar uma única reta passando por estes dois pontos. Neste caso, se r é a única reta que passa pelos pontos A e B escrevemos $r = \overleftrightarrow{AB}$.



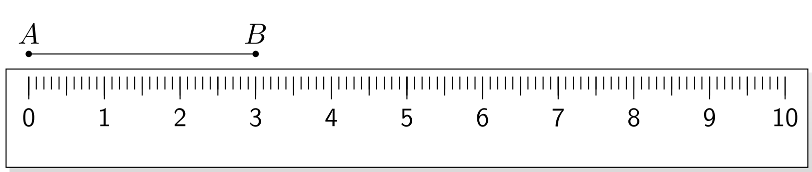
Agora, se são dados três pontos distintos no plano, nem sempre existe uma reta que passa por estes três pontos. Se existir uma reta que passe por estes pontos, dizemos que eles são **colineares**. Por exemplo na próxima figura à esquerda, os pontos A, B e C são colineares, enquanto que a direita os pontos P, Q e R não são colineares.



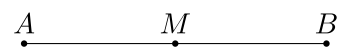
Um ponto A situado sobre uma reta r divide a reta em dois pedaços chamados de **semirretas** de origem A. Para diferenciar estas semirretas, vamos considerar mais dois pontos B e C sobre r de modo que o ponto A esteja entre B e C. A semirreta de origem A e que contém o ponto B é representada por $\overrightarrow{AB}$ e a semirreta de origem A e que contém o ponto C é representada por $\overrightarrow{AC}$.



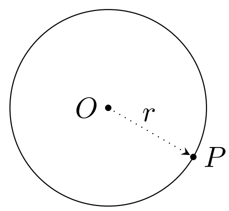
Dados dois pontos A e B sobre uma reta r, o **segmento** de extremidades A e B é a porção da reta formada pelos pontos compreendidos entre A e B. Utilizando uma régua, por exemplo, podemos medir o comprimento de um dado segmento. Nesta apostila o segmento será representado por AB enquanto que o seu comprimento será representado por $\overline{AB}$.



Entre todos os pontos do segmento AB, um dos que mais se destaca é o ponto médio. O **ponto médio** M do segmento AB é o ponto deste segmento que o divide em dois segmentos de mesmo comprimento, isto é, $\overline{AM} = \overline{MB}$.



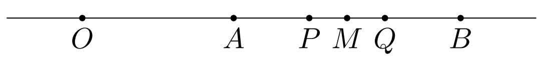
Para finalizar esta seção de definições básicas, vamos apresentar o conceito de circunferência. Dado um ponto O e dado um número real $r > 0$, a **circunferência** de **centro** O e **raio** r é o conjunto dos pontos do plano que estão a distância r de O. Ou seja, um ponto P pertence a esta circunferência quando $\overline{OP} = r$.



Para desenhar um segmento de reta utilizamos uma régua e para desenhar uma circunferência utilizamos um compasso. Para fazer isto, posicionamos a ponta do compasso no ponto O, fixamos sua abertura como sendo igual ao raio r e damos uma volta completa no compasso ao redor do centro O, marcando no plano todos os pontos da circunferência. Ao longo desta apostila, poderão ser apresentados alguns exercícios de construção geométrica simples. Nestes exercícios faça a construção desejada, descreva os passos da construção e justifique que ela realmente fornece o objeto desejado.

Antes de passar para os exercícios, vamos estudar alguns exemplos já resolvidos.

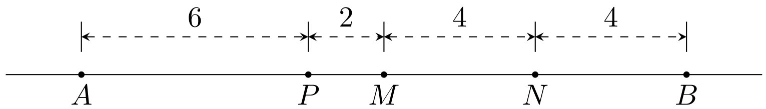
Exemplo 1: Na figura a seguir tem-se que $\overline{OA} = 2$ cm e $\overline{AB} = 3$ cm. Se M é o ponto médio do segmento AB, se P e Q dividem o segmento AB em três partes iguais, calcule os comprimentos dos segmentos OM e OP.



Solução. Como M é ponto médio do segmento AB, temos que $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 1,5$ cm. Daí $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = 2 + 1,5 = 3,5$ cm. Como P e Q dividem o segmento AB em três partes iguais, $\overline{AP} = \frac{1}{3}\overline{AB} = 1$ cm. Daí $\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP} = 2 + 1 = 3$ cm.

Exemplo 2: Um segmento AB tem comprimento igual a 16 cm. Se M é ponto médio do segmento AB, se N é ponto médio de MB e se P é ponto médio de AN, determine o comprimento do segmento AP.

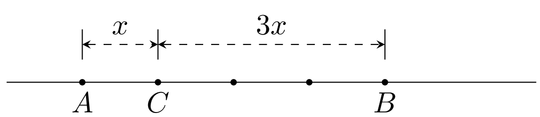
Solução. Temos que $\overline{AM} = \overline{MB} = \frac{16}{2} = 8$ cm. Do mesmo modo, temos que $\overline{MN} = \overline{NB} = \frac{8}{2} = 4$ cm. Assim vemos que $\overline{AN} = \overline{AM} + \overline{MN} = 8 + 4 = 12$ cm. Como P é ponto médio de AN, segue que $\overline{AP} = \frac{\overline{AN}}{2} = \frac{12}{2} = 6$ cm.



Exemplo 3: Os pontos A, B e C são colineares com C entre A e B. Se $\overline{AB} = 20$ e se o segmento CB tem o triplo do comprimento do segmento AC, determine os comprimentos de cada um destes segmentos.

Solução. Podemos imaginar que o segmento AB está dividido em 4 partes iguais. Uma destas partes corresponde ao segmento AC e três destas partes corresponde ao segmento CB. Isto significa que o segmento AC tem um quarto do comprimento do segmento AB e que o segmento CB tem três quartos do comprimento do segmento AB. Ou seja, $\overline{AC} = \frac{1}{4}\overline{AB} = 5$ e $\overline{CB} = \frac{3}{4}\overline{AB} = 15$.

De um modo mais algébrico podemos resolver este exemplo do seguinte modo. Seja $x = \overline{AC}$ e seja $3x = \overline{CB}$. Como $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$ temos que $x + 3x = 20$. Daí segue que $x = 5$ e, portanto, $\overline{AC} = x = 5$ e $\overline{CB} = 3x = 15$.



Exercícios:

1. Sejam A, B, C e D quatro pontos dispostos nesta ordem sobre uma reta r. Quantas são as semirretas contidas em r tendo por origem um de tais pontos? Quantos são os segmentos que têm por extremidades dois de tais pontos?

2. Os pontos A, B e C são colineares com $C \in AB$. Se $\overline{AB} = 10$ cm e $\overline{AC} = 4\overline{BC}$, calcule $\overline{AC}$.

3. Sabe-se que $\overline{AD} = 4$, $\overline{AM} = 7$ e $\overline{DM} = 3$. Os pontos A, M e D são colineares? Se sim, qual ponto está entre os outros dois?

4. Se $\overline{MN} = 8$, $\overline{NP} = 5$ e $\overline{MP} = 4$ então os pontos M, N e P podem ser colineares?

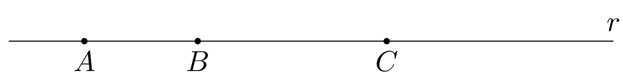
5. Se A, B e C são pontos colineares, determine os possíveis comprimentos de AC, sendo $\overline{AB} = 20$ cm e $\overline{BC} = 12$ cm.

6. Sejam P, Q e R três pontos distintos de uma reta. Se o segmento PQ é igual ao triplo do segmento QR e $\overline{PR} = 32$ cm, determine as possíveis medidas dos segmentos PQ e QR.

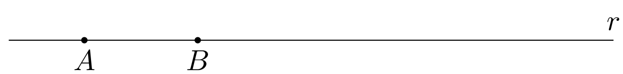
   Observação: Estes dois últimos exercícios são interessantes, pois cada um deles admite duas respostas diferentes, dependendo de qual ponto está entre os outros dois.

7. Sejam dados quatro pontos A, B, M e C dispostos sobre uma mesma reta, nessa ordem. Se M é o ponto médio do segmento AC, AB é o dobro de BM e $\overline{MC} = 30$ cm, determine os comprimentos de AB e BM.

8. (Compasso) Com o auxílio de um compasso, na figura abaixo, determine todos os pontos D da reta r tais que $\overline{CD} = \overline{AB}$.



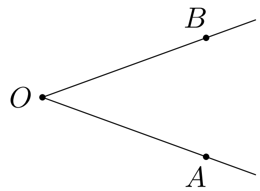
9. (Compasso) Com o auxílio de um compasso, na figura abaixo, determine um ponto P da reta r tal que $\overline{AP} = 3\overline{AB}$.



10. (Régua e Compasso) Marque no plano, com o auxílio de uma régua e de um compasso, três pontos A, B e C tais que $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{AC} = 6$ cm e $\overline{BC} = 4$ cm. Os pontos que você marcou podem estar alinhados?

5.2 Ângulos

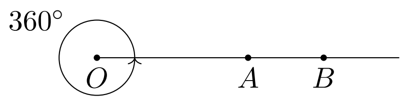
Um **ângulo** é a figura formada por duas semirretas de mesma origem. Estas semirretas são chamadas de **lados** e a origem comum dos lados é o **vértice** do ângulo. Na figura a seguir vemos um ângulo com lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ e com vértice no ponto O. Em uma situação como esta, este ângulo será denotado por $A\hat{O}B$.



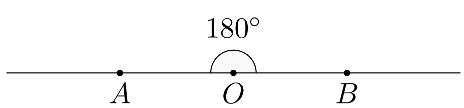
Quando os lados não são coincidentes, um ângulo divide o plano em duas regiões ilimitadas, chamadas de **regiões angulares**. Para indicar cada uma destas regiões, costuma-se utilizar um pequeno arco de circunferência com centro no vértice do ângulo. A figura a seguir ilustra as duas regiões angulares determinadas por um ângulo.

Vamos mostrar agora que do mesmo modo que medimos o comprimento de um segmento, também podemos medir a abertura de um ângulo. Após definir a medida de um ângulo, veremos que o termo "ângulo" será utilizado para significar três coisas: o ângulo propriamente dito (figura formada por duas semirretas de mesma origem); uma das regiões angulares determinada por um ângulo; e o número que é a medida da abertura de uma dessas regiões angulares. Apesar desta tripla possibilidade, o contexto sempre determina cada caso.

Os ângulos são medidos em **graus**. O ângulo que dá uma volta completa ao redor da sua origem tem 360 graus. Para abreviar a notação, substituímos a palavra "graus" por um pequeno círculo em cima e à direita do número. Assim escrevemos 360° para indicar "360 graus".

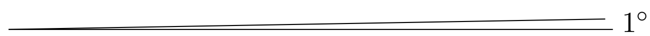


Um ângulo que dá meia volta ao redor da sua origem mede 180 graus ou, abreviadamente, 180°. Este é um ângulo **raso** e os seus dois lados são duas semirretas opostas, pertencentes a uma mesma reta.

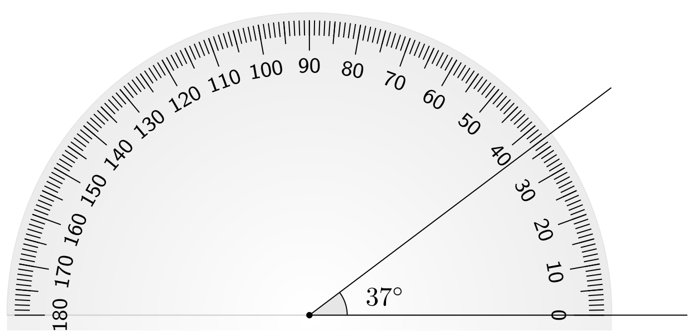


Um ângulo que dá um quarto de volta ao redor da sua origem mede 90°. Este é um ângulo **reto** e ele é formado pela interseção de duas retas **perpendiculares**. Diferentemente dos outros ângulos que são indicados por pequenos arcos de circunferência, um ângulo reto é indicado por um pequeno quadradinho como está ilustrado na figura a seguir onde, do lado esquerdo, vemos um ângulo reto e, do lado direito, vemos duas retas perpendiculares r e s, formando quatro ângulos retos.

Um ângulo com medida de um grau é obtido quando dividimos uma circunferência em 360 partes iguais. Este ângulo tem uma abertura muito pequena e se parece com alguma coisa assim:

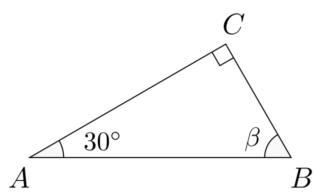


Para medir um ângulo utilizamos um transferidor. Por exemplo, na figura a seguir o ângulo indicado mede 37°.



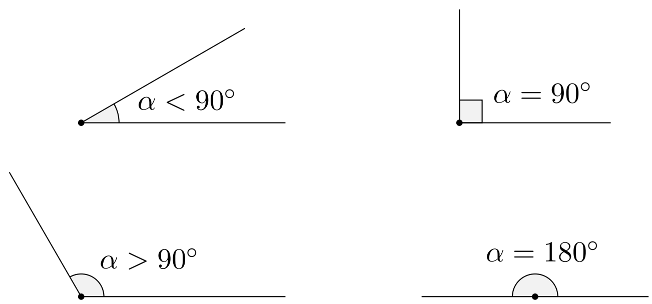
Os ângulos não precisam ser múltiplos inteiros de um grau. Existem ângulos com medidas fracionárias. As principais subdivisões de um grau são os **minutos** e os **segundos**: um minuto é $\frac{1}{60}$ de um grau e um segundo é $\frac{1}{60}$ de um minuto. Para aprender mais sobre medida de ângulos e operações com graus, minutos e segundos assista o vídeo 5, o vídeo 8 e o vídeo 9 da parte de Geometria do canal PICOBMEP no YouTube.

Gostaríamos de observar que podemos utilizar várias notações diferentes para ângulos. Por exemplo, no triângulo da figura a seguir estão indicados três ângulos: $B\hat{A}C = 30°$, $A\hat{B}C = \beta$ e $A\hat{C}B = 90°$. Quando não existir possibilidade de confusão, podemos abreviar a notação, escrevendo apenas $\hat{A} = 30°$, $\hat{B} = \beta$ e $\hat{C} = 90°$. Em palavras, também podemos dizer que temos um ângulo de 30° no vértice A, um ângulo de medida β no vértice B e um ângulo reto no vértice C. Observe também que podemos utilizar a mesma notação para o ângulo e para a medida do ângulo. Por exemplo, a notação $B\hat{A}C$ indica o ângulo de lados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ e com vértice no ponto A, e esta mesma notação pode indicar a medida deste ângulo, quando escrevemos $B\hat{A}C = 30°$.

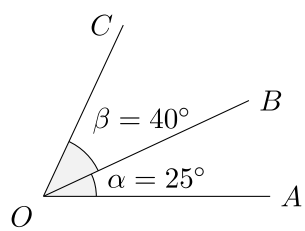


Já vimos as definições de ângulo raso e de ângulo reto. De modo geral, os ângulos são classificados do seguinte modo: dado um ângulo $\alpha = A\hat{O}B$, então:

- α é um ângulo **agudo** se $0° < \alpha < 90°$.
- α é um ângulo **reto** se $\alpha = 90°$. Este é o ângulo formado por duas retas **perpendiculares**.
- α é um ângulo **obtuso** se $90° < \alpha < 180°$.
- α é um ângulo **raso** se $\alpha = 180°$.



Podemos **somar** dois ângulos desenhando um deles junto do outro, fazendo os seus vértices coincidirem e um lado de um ângulo coincidir com um lado do outro ângulo. Neste caso formamos dois **ângulos adjacentes**. Por exemplo, na figura a seguir vemos a soma do ângulo $\alpha = A\hat{O}B = 25°$ com o ângulo $\beta = B\hat{O}C = 40°$, formando o ângulo $\alpha + \beta = A\hat{O}C = 65°$. Nesta figura, α e β são ângulos adjacentes.

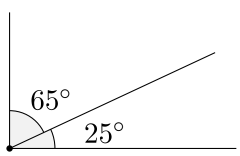


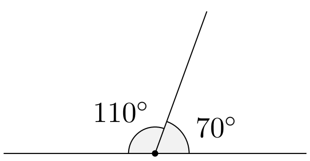
Existem dois casos especiais para o valor da soma de dois ângulos que vale a pena definir (veja o vídeo 6).

- Dois ângulos α e β são **complementares** quando a soma das suas medidas é igual a $90°$. Neste caso, dizemos que α é o **complemento** de β e vice-versa. Por exemplo, os ângulos de medidas $25°$ e $65°$ são complementares, pois $25° + 65° = 90°$. Neste caso dizemos que o complemento do ângulo de $25°$ é o ângulo de $65°$.

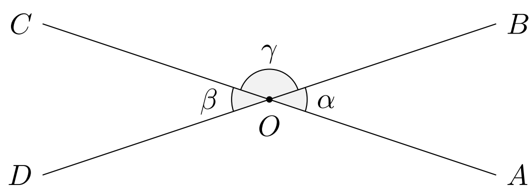
Observe que na soma de dois ângulos complementares obtemos um ângulo reto, ou seja, retas perpendiculares.

- Dois ângulos α e β são **suplementares** quando a soma das suas medidas é igual a $180°$. Aqui dizemos que α é o **suplemento** de β e vice-versa. Por exemplo, os ângulos $70°$ e $110°$ são ângulos suplementares, pois $70° + 110° = 180°$. Observe que na soma de dois ângulos suplementares obtemos um ângulo raso.





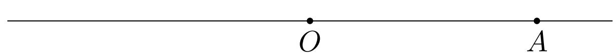
Para terminar esta parte de definições básicas sobre ângulos, vamos definir o conceito de ângulos opostos pelo vértice. Dizemos que duas retas concorrentes $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ em um ponto O definem dois pares de **ângulos opostos pelo vértice**: $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são ângulos opostos pelo vértice, assim como $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$ também são ângulos opostos pelo vértice. Então, para dois ângulos serem opostos pelo vértice eles devem possuir o mesmo vértice e os seus lados devem se juntar para formar duas retas. Na figura a seguir, α e β são ângulos opostos pelo vértice.



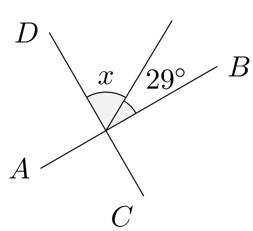
Utilizando o conceito de ângulos suplementares podemos mostrar que dois ângulos opostos pelo vértice possuem a mesma medida. De fato, na figura anterior $\alpha = A\hat{O}B$ e $\beta = C\hat{O}D$ são ângulos opostos pelo vértice. Se $\gamma = B\hat{O}C$ então $\alpha + \gamma = 180°$ pois estes ângulos são suplementares. De modo análogo, vemos que $\beta + \gamma = 180°$. Daí $\alpha = 180° - \gamma = \beta$ (veja esta demonstração no vídeo 7).

Exercícios:

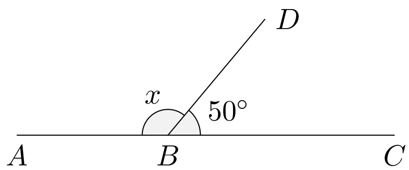
1. (Transferidor) Com o auxílio de um transferidor, sobre a figura a seguir desenhe semirretas $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ e $\overrightarrow{OE}$ tais que $A\hat{O}B = 30°$, $A\hat{O}C = 60°$, $A\hat{O}D = 90°$ e $A\hat{O}E = 135°$.



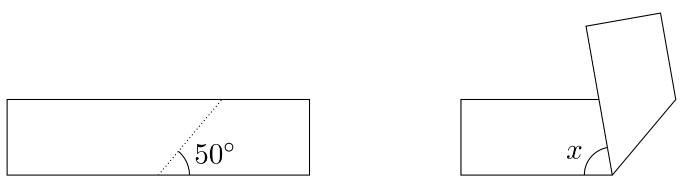
2. O que é um ângulo reto? O que são retas perpendiculares? O que significa dizer que dois ângulos são complementares? Na figura a seguir as retas AB e CD são perpendiculares. Neste caso, qual é a medida do ângulo x? (veja vídeo 7).



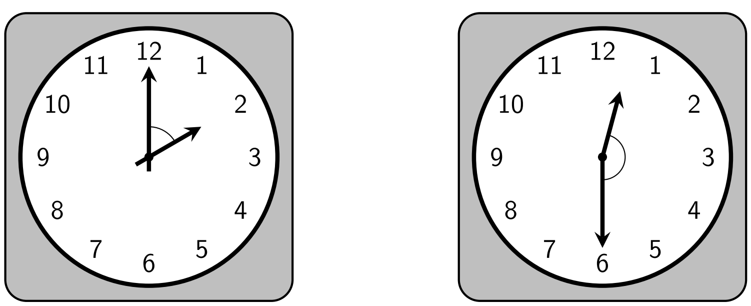
3. O que é um ângulo raso? O que são ângulos suplementares? Na figura a seguir, os pontos A, B e C estão alinhados. Qual é a medida do ângulo x?



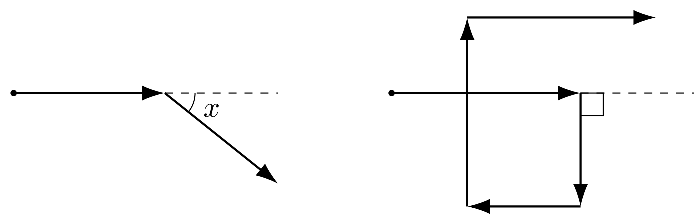
4. **(OBMEP 2006 – N2Q13 – 1ª fase)** Uma tira de papel retangular é dobrada ao longo da linha tracejada, conforme indicado, formando a figura plana a seguir. Qual a medida do ângulo x?



5. **(OBMEP 2006 – N1Q11 e N2Q10 – 1ª fase)** Qual é a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando ele marca 2 horas? E qual é este menor ângulo quando o relógio marca 12 horas e 30 minutos?



6. (Banco de Questões 2013 – Nível 1 – questão 15) Um certo robô só anda para a frente ou vira à direita, com um ângulo de x graus em relação à direção original com que estava andando, conforme é mostrado na figura a seguir, à esquerda. Para retornar à direção e ao sentido original, o robô precisa virar à direita um certo número de vezes. Por exemplo, se $x = 90°$, então, o robô precisa virar à direita quatro vezes. Observe isto na figura a seguir, à direita.

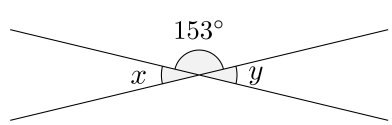


   (a) Quantas vezes o robô precisa virar à direita se $x = 60°$?

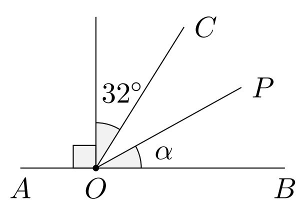
   (b) Quantas vezes o robô precisa virar à direita se $x = 42°$?

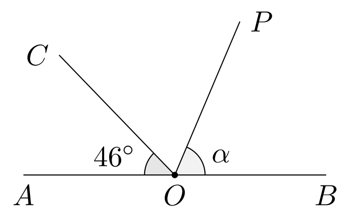
   (c) E se $x = 47°$?

7. Na figura vemos duas retas concorrentes. Determine as medidas dos ângulos x e y.



8. A **bissetriz** de um ângulo é a semirreta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que divide o ângulo em dois ângulos de mesma medida. Nas figuras a seguir, determine a medida do ângulo α sabendo que os pontos A, O e B estão alinhados e que a semirreta $\overrightarrow{OP}$ é a bissetriz do ângulo $B\hat{O}C$ (para estudar o conceito de bissetriz assista o vídeo 7).



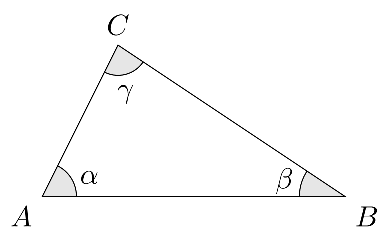


9. Dois ângulos adjacentes somam 136°. Qual é a medida do ângulo formado pelas suas bissetrizes?

10. As bissetrizes de dois ângulos adjacentes formam um ângulo de 52°. Se um deles mede 40°, qual é a medida do outro ângulo?

5.3 Triângulos

Os segmentos de reta que unem três pontos não colineares A, B e C formam um **triângulo**, que será indicado como o triângulo ABC.

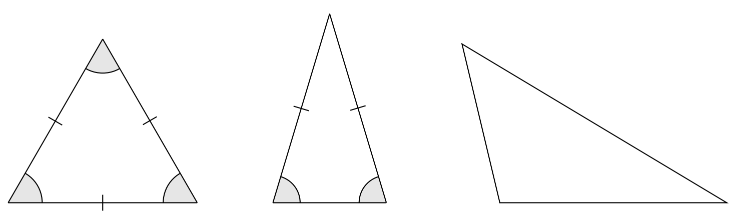


Neste caso, os pontos A, B e C são os **vértices** e os segmentos AB, BC e CA são os **lados** do triângulo. Os ângulos $\alpha = C\hat{A}B$, $\beta = A\hat{B}C$ e $\gamma = B\hat{C}A$ são os **ângulos internos** do triângulo.

Podemos classificar os triângulos de duas maneiras básicas: em relação aos comprimentos dos seus lados ou em relação às medidas dos seus ângulos internos. No que segue vamos apresentar simultaneamente estas duas classificações (assista no vídeo 14 uma explicação detalhada destas classificações).

- Um triângulo é **equilátero** se os seus três lados tiverem o mesmo comprimento. De modo equivalente, um triângulo é equilátero se os seus três ângulos internos tiverem a mesma medida.
- Um triângulo é **isósceles** se ele possuir pelo menos dois lados de mesmo comprimento. De modo equivalente, um triângulo é isósceles quando dois dos seus ângulos internos tiverem a mesma medida.
- Um triângulo é **escaleno** quando os seus três lados tiverem comprimentos diferentes. De modo equivalente, um triângulo é escaleno quando todos os seus ângulos internos tiverem medidas diferentes.

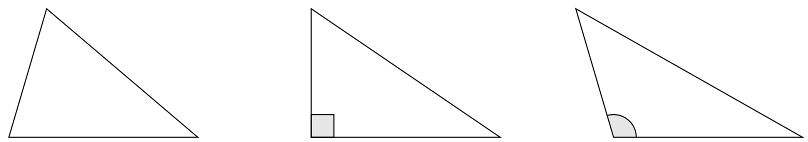
Na figura a seguir vemos, em ordem, um triângulo equilátero, um triângulo isósceles e um triângulo escaleno. Observe que no triângulo equilátero os três ângulos internos possuem a mesma medida e que no triângulo isósceles existem dois ângulos internos com mesma medida.



- Um triângulo é **acutângulo** quando todos os seus ângulos internos forem agudos.
- Um triângulo é **retângulo** quanto possuir um ângulo interno reto, isto é, um ângulo interno de medida igual a 90°.

- Um triângulo é **obtusângulo** quando possuir um ângulo interno obtuso.

Na figura a seguir vemos, em ordem, um triângulo acutângulo, um triângulo retângulo e um triângulo obtusângulo.



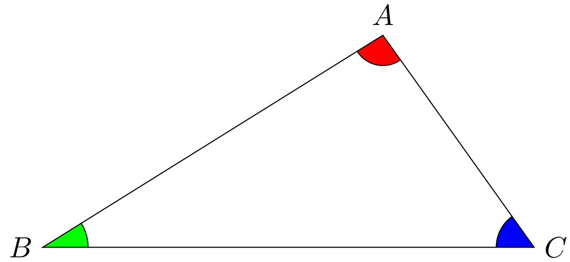
Se ABC é um triângulo isósceles com lados iguais $\overline{AB} = \overline{AC}$, dizemos que o lado BC é a **base** deste triângulo isósceles. Então se um triângulo isósceles possui dois lados iguais e um lado diferente, então este lado diferente é a base do triângulo. Entretanto, se um triângulo isósceles possui todos os lados iguais ele é um triângulo equilátero e neste caso qualquer um dos seus lados pode ser chamado de base. Observe que todo triângulo equilátero é um triângulo isósceles, mas nem todo triângulo isósceles é equilátero.

<u>Soma dos ângulos internos</u>

Vamos falar agora sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo. Para determinar formalmente o valor desta soma precisamos de resultados que somente serão estudados no próximo encontro presencial. Entretanto, como é importante saber o valor desta soma e como ela apresenta várias aplicações, vamos determinar o valor desta soma através de uma atividade de dobradura e vamos deixar a demonstração formal para o próximo encontro presencial. Até lá podemos ir nos familiarizando com o resultado e também podemos utilizá-lo na resolução de vários problemas.

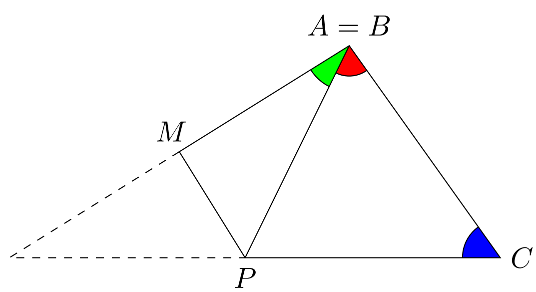
"geometria˙diagra
2015/7/22
page 21
Estilo OBMEP

- Em uma folha de papel, utilizando uma régua desenhe um triângulo qualquer ABC e, para poder visualizar melhor, faça marcas de ângulos nos três cantos, como na ilustração a seguir. Não precisa imitar a ilustração, faça um triângulo do seu gosto e tamanho, mas não o faça muito pequeno.

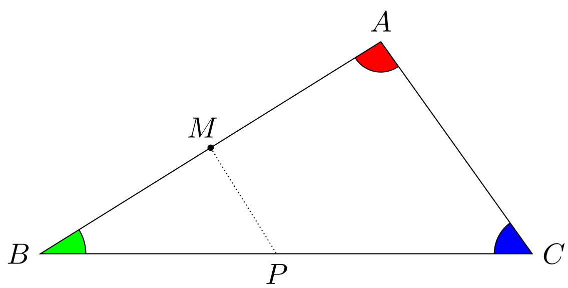


- Recorte o triângulo e pinte, dos dois lados do papel, cada ângulo de uma cor. A cor de um lado deve ser igual à cor do outro, como se a tinta atravessasse o papel.

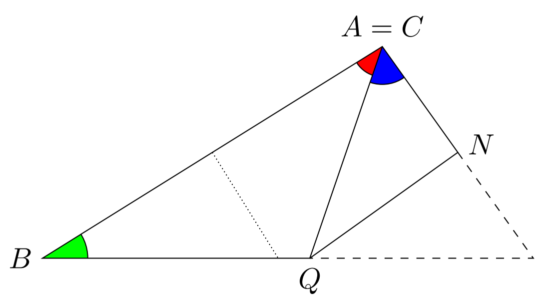
- Faça a dobra MP de modo que o ponto B coincida com o ponto A, como está indicado na figura a seguir, Passando as pontas dos dedos exatamente sobre a dobra, marque o segmento MP.



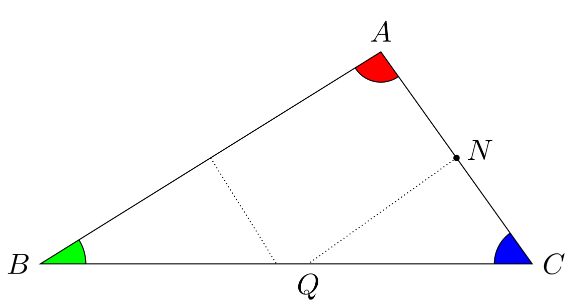
- Desdobre a folha, voltando a obter o triângulo ABC. Após desdobrar a folha, nela estará marcado o segmento MP perpendicular ao segmento AB, sendo M o ponto médio de AB.



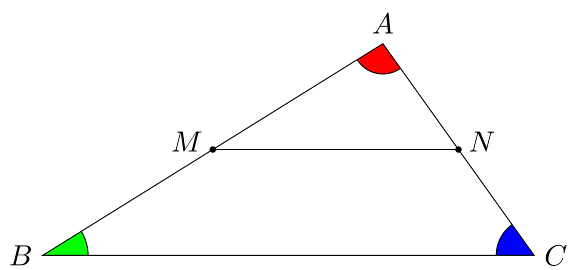
- De modo análogo, faça a dobra NQ de modo que o ponto C coincida com o ponto A, como está indicado na figura a seguir. Passando as pontas dos dedos sobre a dobra, faça um vinco marcando o segmento NQ.



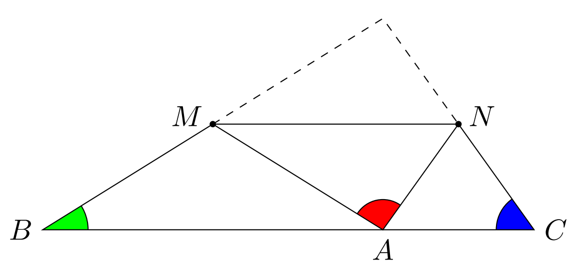
- Desdobre a folha, voltando a obter o triângulo ABC. Após desdobrar a folha, nela estará marcado o segmento NQ perpendicular ao segmento AC, sendo N o ponto médio de AC.



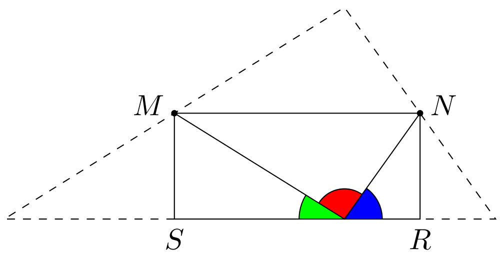
- Com o auxílio de uma régua, ligue os pontos M e N, como está ilustrado na figura a seguir.



- Dobre o seu triângulo sobre o segmento MN fazendo o ponto A se apoiar sobre o segmento BC. Fazendo isso, você vai obter uma figura como a seguir.



- Agora faça a dobra MS fazendo o ponto B coincidir com A. Em seguida faça a dobra NR, fazendo o ponto C coincidir com o ponto A. Você vai obter um retângulo $MNRS$ como o que está ilustrado a seguir.



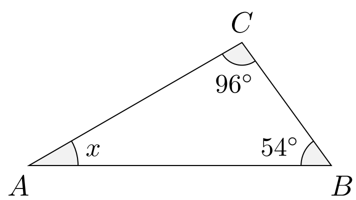
- Observe que os três ângulos do triângulo se juntaram formando ângulos adjacentes cuja soma é igual a um ângulo raso. Isto indica que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

Enunciando formalmente, a atividade anterior sugere o seguinte teorema que será demonstrado no próximo encontro presencial.

Teorema: *A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a* 180°.

Vamos utilizar agora este resultado na solução de alguns exemplos.

Exemplo 1: Determine a medida do ângulo x do triângulo ABC da figura a seguir.

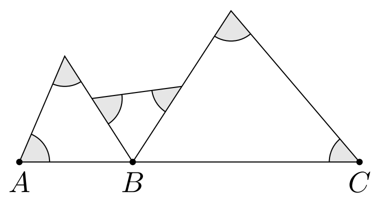


Solução. Como a soma dos ângulos de um triângulo é 180°, temos uma relação entre as três medidas destes ângulos. Daí, se são conhecidos dois ângulos de um triângulo, sempre é possível determinar a medida do terceiro ângulo. No caso deste exemplo, podemos escrever a igualdade $x + 54° + 96° = 180°$. Daí $x = 180° - 54° - 96° \Rightarrow x = 30°$.

Exemplo 2: Cada um dos ângulos internos de um triângulo equilátero mede 60°.

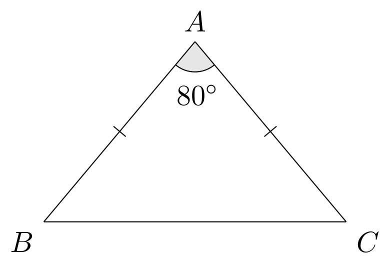
Solução. Com efeito, seja x a medida de cada um dos ângulos internos de um triângulo equilátero. Como a soma dos ângulos de um triângulo é 180°, temos que $x + x + x = 180°$ e, portanto, $x = \dfrac{180°}{3} = 60°$.

Exemplo 3: (OBMEP 2014 – N2Q3 – 1ª fase) Na figura, os pontos A, B e C estão alinhados. Qual é a soma dos ângulos marcados em cinza?



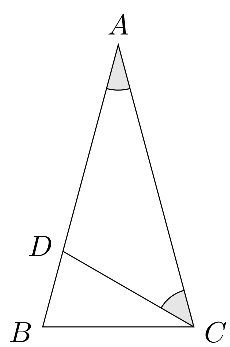
Solução. A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Observe que os três ângulos não marcados dos triângulos (com vértices em B) somam 180°, já que A, B e C estão alinhados. Para calcular a soma dos ângulos marcados podemos somar os ângulos internos dos três triângulos e, do valor desta soma, podemos subtrair 180°, que é a soma dos ângulos no vértice B. Assim, a soma dos ângulos marcados é $(180° \times 3) - 180° = 360°$.

Exemplo 4: Na figura a seguir vemos um triângulo isósceles de base BC. Se $C\hat{A}B = 80°$, calcule a medida dos ângulos da base deste triângulo isósceles.



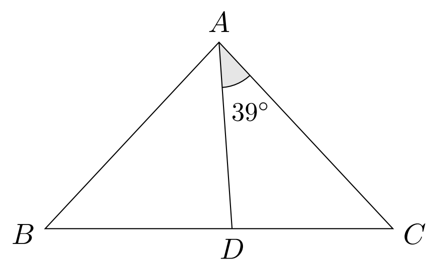
Solução. Sabemos que em um triângulo isósceles os dois ângulos da base possuem a mesma medida. Se α é a medida dos ângulos da base deste triângulo isósceles, então $\alpha + \alpha + 80° = 180°$. Daí, $2\alpha = 100°$ donde $\alpha = 50°$.

Exemplo 5: (OBMEP 2005 – N2Q15 – 1ª fase) O triângulo ABC é isósceles de base BC e o ângulo $B\hat{A}C$ mede 30°. O triângulo BCD é isósceles de base BD. Determine a medida do ângulo $D\hat{C}A$.

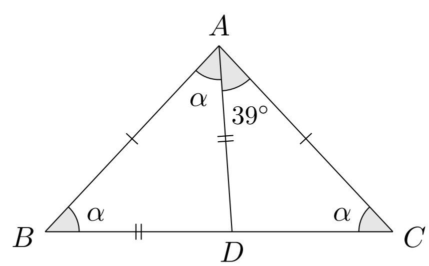


Solução. Sabemos que a soma dos três ângulos internos de um triângulo é igual a 180°. Como o ângulo $\hat{A}$ do triângulo ABC mede 30°, a soma das medidas dos ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ é $180° - 30° = 150°$. Por outro lado, como o triângulo é isósceles de base BC, os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ são iguais, logo cada um deles mede $150° \div 2 = 75°$. Como o triângulo BCD é isósceles de base BD, temos $B\hat{D}C = C\hat{B}D = 75°$. O mesmo raciocínio usado acima mostra que $D\hat{C}B = 180° - 2 \cdot 75° = 30°$. Segue que $D\hat{C}A = A\hat{C}B - D\hat{C}B = 75° - 30° = 45°$.

Exemplo 6: (Banco de Questões 2009 – Nível 1 – Lista 8 – Exercício 6) Encontre a medida do ângulo $B\hat{A}D$, sabendo que $D\hat{A}C = 39°$, $AB = AC$ e $AD = BD$.

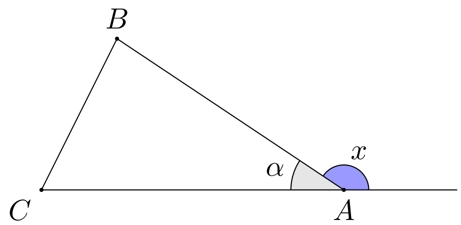


Solução. Como $AB = AC$, o triângulo ABC é isósceles, logo $A\hat{B}C = A\hat{C}B$. Sento $AD = BD$ o triângulo ABD também é isósceles, logo $A\hat{B}D = B\hat{A}D$. Temos então $A\hat{B}C = A\hat{C}B = B\hat{A}D$. Na figura a seguir, estes três ângulos iguais estão representados pela letra α. Os ângulos internos do triângulo ABC são $\alpha + 39°$, α e α. Somando estes ângulos obtemos $\alpha + 39° + \alpha + \alpha = 180° \Rightarrow 3\alpha = 180° - 39° = 141° \Rightarrow$ Assim $\alpha = 47°$.

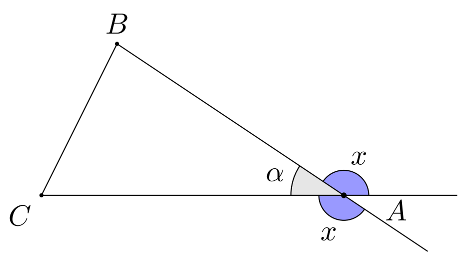


Ângulo externo

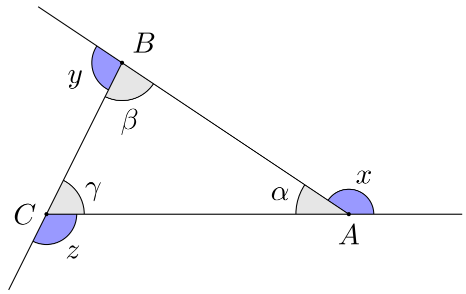
Nos exemplos anteriores exploramos a definição de ângulo interno e o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo. Vejamos agora que um triângulo também possui ângulos externos. De fato, seja ABC um triângulo com ângulo interno α no vértice A. Em cada vértice do triângulo um **ângulo externo** é o ângulo formado entre um lado e o prolongamento do outro lado do triângulo que chega neste vértice. Na figura a seguir, por exemplo, x é ângulo externo no vértice A. Ele é o ângulo formado pelo lado AB e pelo prolongamento do lado AC.



Observe que em cada vértice de um triângulo existem dois ângulos externos. Por exemplo, no vértice A do triângulo ABC podemos considerar o ângulo formado entre o lado AB e o prolongamento do lado AC, mas também podemos considerar o ângulo formado pelo lado AC e pelo prolongamento do lado AB. Estes dois ângulos externos são opostos pelo vértice e possuem, portanto, a mesma medida. Na figura a seguir vemos os dois ângulos externos x no vértice A.



Considere agora um triângulo ABC com ângulos internos α, β e γ. Sejam x, y e z os ângulos externos desse triângulo nos vértices A, B e C (veja figura a seguir). A respeito do conceito de ângulo externo é importante observar as seguintes propriedades: (estude a definição de ângulo externo e estude explicações sobre estas propriedades no vídeo 18).



- Um ângulo externo é o suplementar do seu ângulo interno adjacente. Por exemplo, na figura anterior α é ângulo interno e x é o seu ângulo externo adjacente. A soma $\alpha + x$ é um ângulo raso e, portanto, esses ângulos são suplementares.

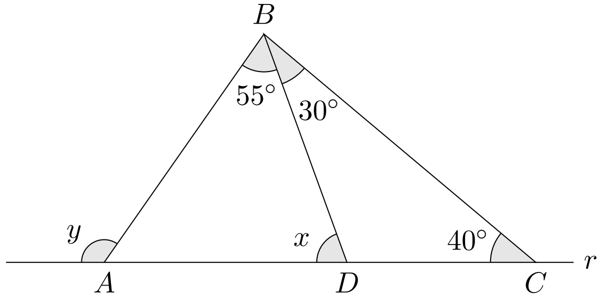
- Um ângulo externo é igual a soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele. De fato, utilizando a nomenclatura da figura anterior temos que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ e que $\alpha + x = 180°$. Daí $\beta + \gamma = 180° - \alpha = x$ e, portanto, o ângulo externo x é igual a soma dos ângulos internos não adjacentes β e γ.

- A soma dos ângulos externos de um triângulo é $360°$. De fato, utilizando as propriedades anteriores e a notação da figura anterior temos que $x = 180° - \alpha$, $y = 180° - \beta$ e $z = 180° - \gamma$. Daí a soma dos ângulos externos é

$$\begin{aligned} x + y + z &= (180° - \alpha) + (180° - \beta) + (180° - \gamma) \\ &= 540° - (\alpha + \beta + \gamma) = 540° - 180° = 360°. \end{aligned}$$

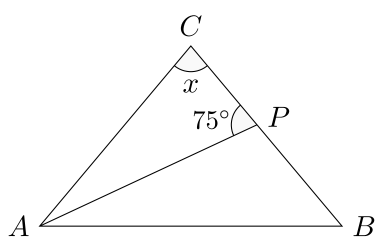
Vamos ver agora alguns exemplos de problemas resolvidos com o conceito de ângulo externo.

Exemplo 7: Na figura a seguir os pontos A, D e C pertencem à reta r. Determine x e y.

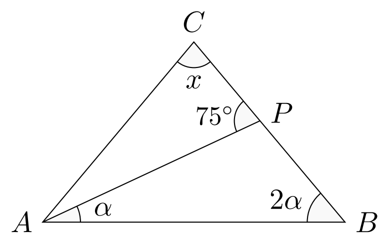


Solução. O ângulo x é ângulo externo do triângulo BCD não adjacente aos ângulos internos de $30°$ e de $40°$. Daí $x = 30°+40° = 70°$. Do mesmo modo, y é ângulo externo do triângulo ABD não adjacente aos ângulos internos de $55°$ e de $x = 70°$. Daí $y = 55° + x = 55° + 70° = 125°$.

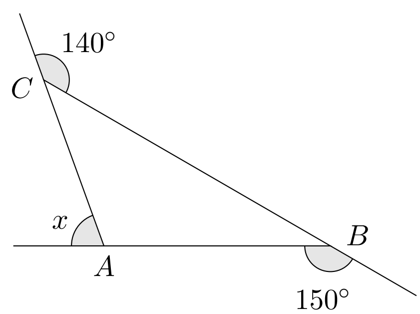
Exemplo 8: Na figura a seguir, ABC é um triângulo isósceles de base AB e o segmento AP está sobre a reta bissetriz do ângulo $C\hat{A}B$. Se $A\hat{P}C = 75°$, determine a medida do ângulo x.



Solução. Seja 2α a medida do ângulo da base do triângulo ABC. Daí $P\hat{A}B = \alpha$ e $P\hat{B}A = 2\alpha$. No triângulo PAB o ângulo de $75°$ é ângulo externo não adjacente aos ângulos internos de medidas α e 2α. Daí $\alpha + 2\alpha = 75°$ e, portanto, $\alpha = 25°$. Logo o triângulo ABC possui ângulos de $50°$ na sua base. Como a soma dos ângulos internos do triângulo ABC deve ser igual a $180°$, concluímos que $x = 180° - 50° - 50° = 80°$.

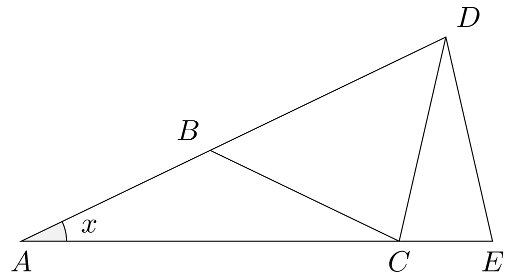


Exemplo 9: Dados os ângulos externos de $140°$ e $150°$ do triângulo ABC, calcule o ângulo externo x.



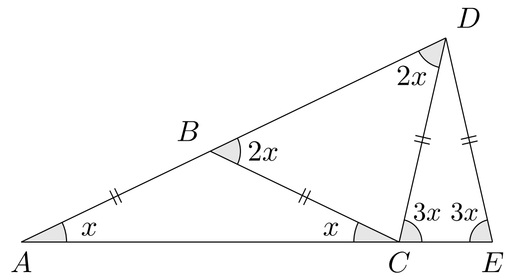
Solução. Sabemos que a soma dos ângulos externos de qualquer triângulo é igual a $360°$. Daí podemos concluir que $x + 140° + 150° = 360°$ e daí $x = 70°$.

Exemplo 10: Na figura a seguir, ADE é um triângulo isósceles de base DE. Além disso, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}$. Calcule a medida do ângulo $x = D\hat{A}E$.



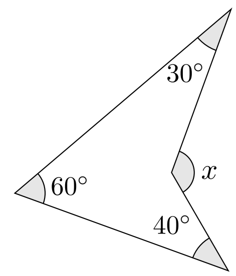
Solução.

- Como o triângulo ABC é isósceles, $A\hat{C}B = x$.
- Como o ângulo $D\hat{B}C$ é ângulo externo do triângulo ABC ele é a soma dos ângulos internos não adjacentes. Portanto, $D\hat{B}C = x + x = 2x$.
- Como o triângulo DBC é isósceles, $B\hat{D}C = 2x$.
- Como o ângulo $D\hat{C}E$ é ângulo externo do triângulo DAC ele é a soma dos ângulos internos não adjacentes e, portanto, $D\hat{C}E = x + 2x = 3x$.
- Como o triângulo DCE é isósceles, $D\hat{E}C = 3x$.
- Como o triângulo ADE é isósceles, $A\hat{D}E = A\hat{E}D = 3x$. Daí podemos concluir que $C\hat{D}E = x$.

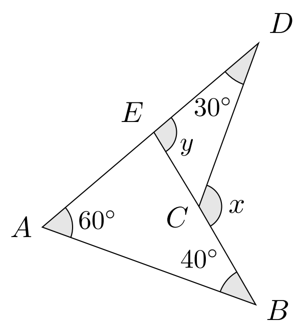


- Somando os ângulos internos do triângulo ADE obtemos $x+3x+3x=180°$. Daí segue que $7x=180°$ ou seja $x=\dfrac{180°}{7}\simeq 25,7°$.

Exemplo 11: Dados os ângulos da figura, determine a medida do ângulo x.



Solução. Vamos denotar por A, B, C e D os vértices do quadrilátero da figura dada. Prolongando o lado BC, como ilustrado a seguir, formamos o ângulo y que é ângulo externo do triângulo ABE não adjacente aos ângulos internos de $60°$ e de $40°$. Daí $y=60°+40°=100°$. Considerando o triângulo CDE, x é ângulo externo não adjacente aos ângulos internos de $30°$ e de $y=100°$. Daí $x=30°+100°=130°$.

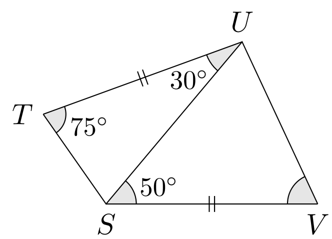


Portanto, x é igual a soma dos três ângulos internos dados, ou seja, $x=30°+40°+60°$.

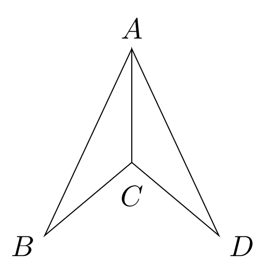
Exercícios:

1. Mostre que um triângulo possui no máximo um ângulo obtuso.

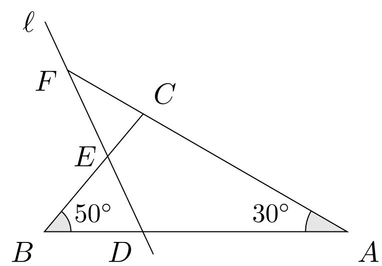
2. (Banco de Questões 2010 – Nível 2 – questão 69) Na figura dada, $TU = SV$. Quanto vale o ângulo $S\hat{V}U$, em graus?



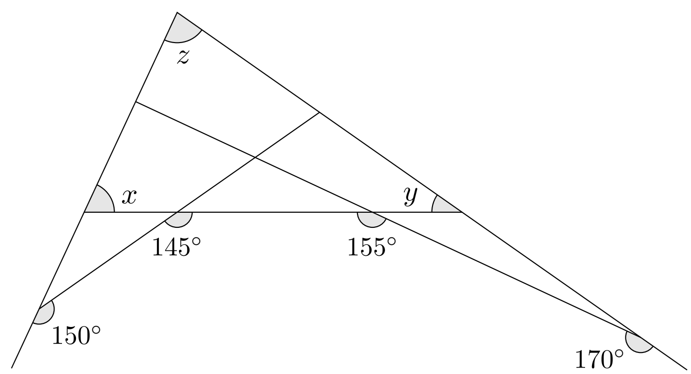
3. (Banco de Questões 2011 – Nível 1 – questão 13) Na figura a seguir temos dois triângulos, ABC e ADC tais que $AB = AD$ e $CB = CD = CA$. Sabendo que $C\hat{B}A = 25°$ determine a medida do ângulo $B\hat{C}D$.



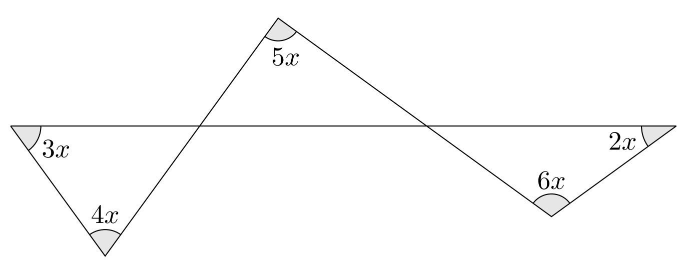
4. (Banco de Questões 2011 – Nível 2 – questão 18) Seja ABC um triângulo com $B\hat{A}C = 30°$ e $A\hat{B}C = 50°$. A reta ℓ corta os lados AB, BC e o prolongamento de AC em D, E e F, respectivamente. Se o triângulo DBE é isósceles, quais são as três possíveis medidas para o ângulo $C\hat{F}E$?



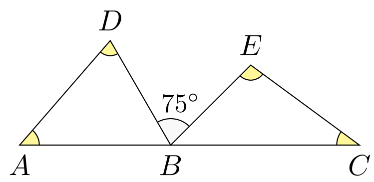
5. Dados os ângulos 150°, 145°, 155° e 170° indicados na figura, determine as medidas dos ângulos x, y e z.



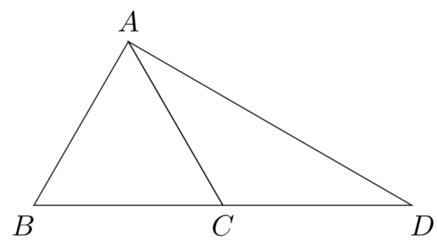
6. (Banco de Questões 2010 – Nível 2 – questão 37) Na figura estão indicadas, em graus, as medidas de alguns ângulos em função de x. Quanto vale x?



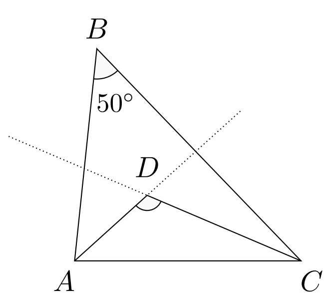
7. Na figura a seguir os pontos A, B e C estão alinhados e $D\hat{B}E = 75°$. Calcule a soma dos ângulos $\hat{A} + \hat{D} + \hat{E} + \hat{C}$.



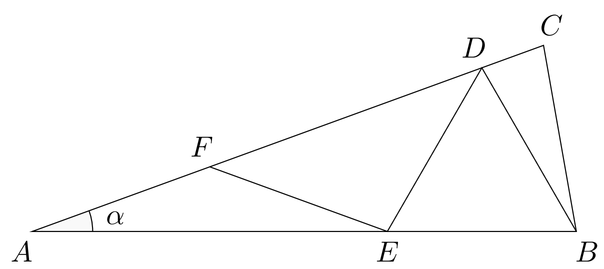
8. Na figura a seguir, o triângulo ABC é equilátero e o triângulo ACD é isósceles. Determine o menor ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos $A\hat{B}D$ e $B\hat{A}D$.



9. (Banco de Questões 2010 – Nível 2 – questão 8) Na figura, temos $\hat{B} = 50°$, sendo AD e CD as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ do triângulo ABC, respectivamente. Qual é a medida do ângulo $A\hat{D}C$?



10. **(Desafio)** Na figura a seguir, ABC é um triângulo isósceles de base BC. Além disso, $\overline{AF} = \overline{FE} = \overline{ED} = \overline{DB} = \overline{BC}$. Calcule a medida do ângulo α. Tente resolver este problema sozinho utilizando o fato que em um triângulo um ângulo externo é igual a soma dos ângulos internos não adjacentes. Em seguida compare a sua solução com a que está apresentada no vídeo 25.

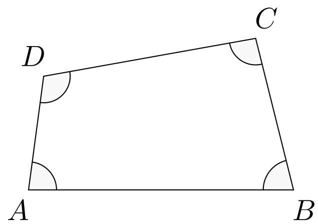


5.4 Quadriláteros

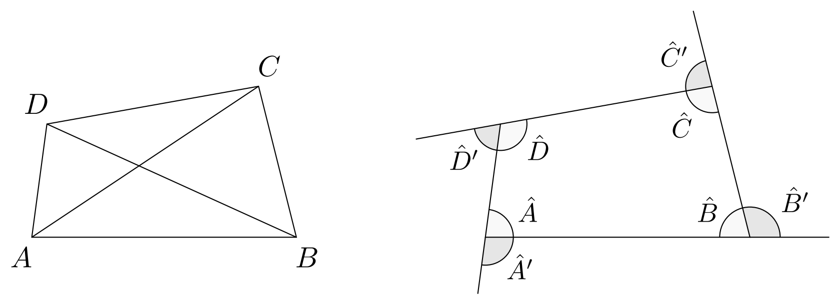
Nesta seção vamos estudar os quadriláteros e os seus elementos: lados, ângulos internos, ângulos externos, diagonais, etc. Além disso, vamos definir e observar algumas propriedades importantes de alguns quadriláteros particulares: quadrados, retângulos, paralelogramos, trapézios e losangos. Observamos que o vídeo 29 da parte de Geometria do canal PICOBMEP no YouTube apresenta um estudo detalhado das definições básicas de um quadrilátero geral, o vídeo 30 apresenta um estudo dos paralelogramos, o vídeo 33 traz um estudo dos trapézios e o vídeo 36 apresenta os retângulos, os losangos e os quadrados. Recomendamos que o estudo desta apostila seja acompanhado da visualização atenta de todos estes vídeos.

“geometria˙diagra
2015/7/22
page 38
Estilo OBMEP

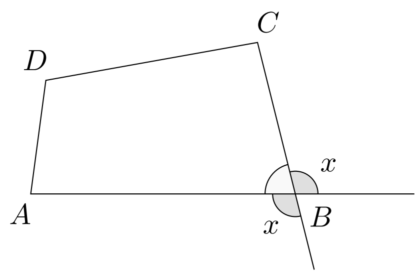
Um **quadrilátero** é formado por quatro **vértices** A, B, C e D e por quatro **lados** que são os segmentos AB, BC, CD e DA tais que estes segmentos se encontram somente nos vértices, como está indicado na figura a seguir, e de modo que quaisquer três vértices não sejam pontos colineares.



Os ângulos indicados na figura anterior são os **ângulos internos** do quadrilátero. Na figura a seguir, os segmento AC e BD são as **diagonais** e os ângulos suplementares dos ângulos internos são os **ângulos externos** do quadrilátero $ABCD$. Isto é, se $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são os ângulos internos, então $\hat{A}' = 180° - \hat{A}$, $\hat{B}' = 180° - \hat{B}$, $\hat{C}' = 180° - \hat{C}$ e $\hat{D}' = 180° - \hat{D}$ são os ângulos externos.



Como no caso dos triângulos, em cada vértice, um ângulo externo de um quadrilátero é o ângulo formado por um lado e pelo prolongamento do outro lado do quadrilátero que chega neste vértice. Em cada vértice de um quadrilátero existem dois ângulos externos opostos pelo vértice. Na figura a seguir indicamos os dois ângulos externos x no vértice B do quadrilátero $ABCD$.



A respeito da soma dos ângulos internos e da soma dos ângulos externos de um quadrilátero, temos os seguintes resultados:

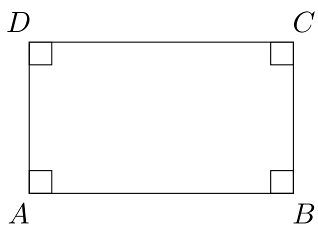
- A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a $360°$. De fato, desenhando uma diagonal que divide o quadrilátero em dois triângulos, vemos que a soma dos ângulos internos do quadrilátero é igual a soma dos ângulos internos desses dois triângulos. Logo, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a $2 \times 180° = 360°$.

- Como no caso dos triângulos, a soma dos ângulos externos de um quadrilátero também é igual a $360°$. De fato, utilizando a notação introduzida logo acima, a soma dos ângulos externos é igual a

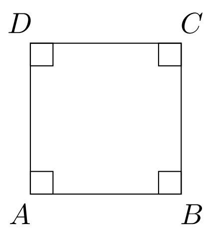
$$\begin{aligned}\hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' + \hat{D}' &= (180° - \hat{A}) + (180° - \hat{B}) + \\ &\qquad + (180° - \hat{C}) + (180° - \hat{D}) \\ &= 4 \times 180° - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}) \\ &= 4 \times 180° - 360° = 2 \times 180° = 360°.\end{aligned}$$

As definições e as propriedades enunciadas até aqui são válidas para quaisquer quadriláteros. Faremos agora um estudo de alguns quadriláteros especiais que possuem propriedades bem particulares, mas muito importantes para o estudo da Geometria. Após cada definição apresentamos uma ilustração do quadrilátero definido. Recomendamos que sobre cada figura você represente as propriedades indicadas sobre lados, ângulos e diagonais.

- **Retângulo:** É um quadrilátero com todos os ângulos retos. Dois lados opostos de um retângulo são paralelos e possuem o mesmo comprimento. Além disso, as diagonais de um retângulo possuem o mesmo comprimento e se encontram no ponto médio comum.

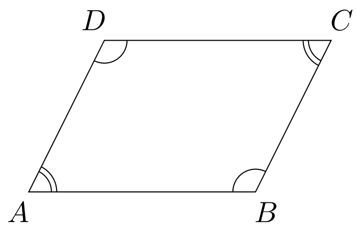


- **Quadrado:** É um retângulo com os quatro lados de mesmo comprimento.

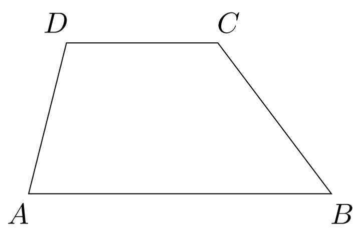


- **Paralelogramo:** É um quadrilátero com lados opostos paralelos. Em um paralelogramo os lados opostos possuem o mesmo comprimento e dois ângulos opostos quaisquer possuem a mesma medida.

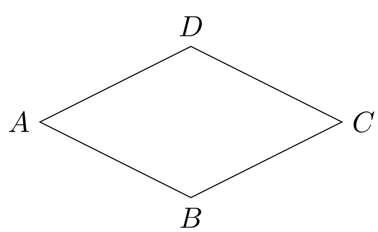
Embora as diagonais de um paralelogramo possam ter comprimentos diferentes, elas se encontram no ponto médio comum.



- **Trapézio:** É um quadrilátero com um par de lados opostos paralelos. Na figura a seguir, vemos um trapézio com os lados AB e CD paralelos.



- **Losango:** É um quadrilátero com os quatro lados de mesmo comprimento. Em um losango dois lados opostos são paralelos e possuem o mesmo comprimento. Dois ângulos opostos quaisquer de um losango possuem a mesma medida. As diagonais de um losango são perpendiculares e se encontram no ponto médio comum.



O **perímetro** de um triângulo é a soma dos comprimentos dos seus três lados. O perímetro de um quadrilátero é a soma dos comprimentos dos seus quatro lados. E de modo geral se temos uma figura com n lados, o perímetro desta figura é a soma dos comprimentos dos seus n lados, ou seja é o comprimento do contorno da figura.

Vamos agora utilizar as definições e as propriedades apresentadas nesta seção para resolver, como exemplo, algumas questões de provas da OBMEP.

Exemplo 1: (OBMEP 2008 – N2Q15 – 1ª fase) Numa folha quadrada de papel de 30 cm de lado, branca de um lado e cinza do outro, marcou-se um quadrado $ABCD$ em linhas pontilhadas, como na Figura 1. A folha foi dobrada ao longo das linhas pontilhadas e o resultado está mostrado na Figura 2, onde a parte cinza é um quadrado com 12 cm de lado. Qual é o comprimento do segmento PA?

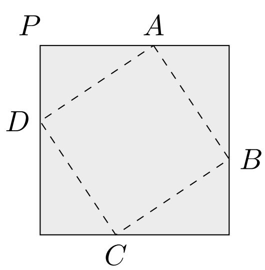


Figura 1

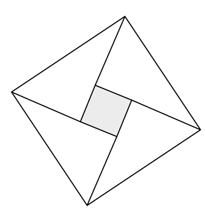
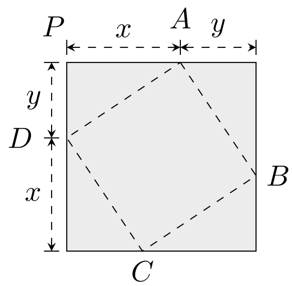
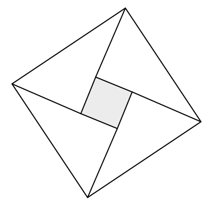


Figura 2

Solução. Sejam x e y as medidas (em centímetros) de PA e PD, respectivamente. Vemos então que $x+y=30$ e que o lado do quadrado central da folha dobrada é $x-y$. Como este quadrado tem lado 12, segue que $x-y=12$. Somando as equações $x+y=30$ e $x-y=12$ obtemos $(x+y)+(x-y)=30+12 \Rightarrow 2x=42 \Rightarrow x=21$. Portanto, o segmento PA tem comprimento de 21 cm.

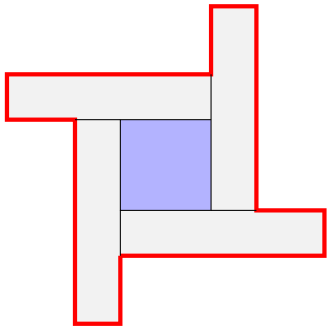




Exemplo 2: (OBMEP 2011 – N1Q5 – 1ª fase) Márcia cortou uma tira retangular de 2 cm de largura de cada um dos quatro lados de uma folha de papel medindo 12 cm por 20 cm. Qual é o perímetro do pedaço de papel que sobrou?

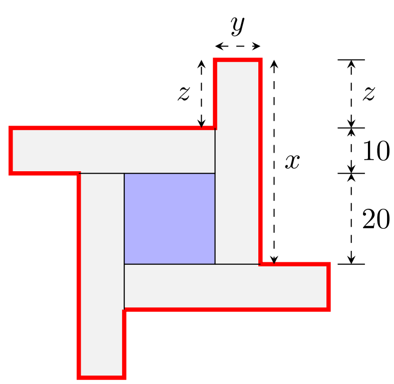
Solução. Cortar uma tira de dois centímetros de largura de cada lado da folha faz com que cada lado da folha passe a medir 4 cm a menos. Logo, o pedaço de papel que sobrou é um retângulo de dimensões $12 - 4 = 8$ cm e $20 - 4 = 16$ cm, cujo perímetro é $8 + 8 + 16 + 16 = 48$ cm.

Exemplo 3: (OBMEP 2014 – N1Q3 – 1ª fase) Juntando, sem sobreposição, quatro ladrilhos retangulares de 10 cm por 45 cm e um ladrilho quadrado de lado 20 cm, Rodrigo montou a figura abaixo. Com uma caneta de ponta mais grossa ele traçou o contorno da figura. Qual é o comprimento deste contorno?

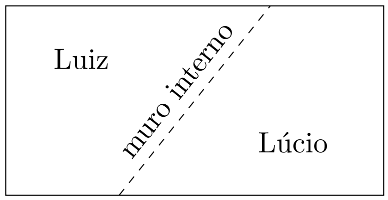


Solução. O comprimento total do contorno da figura, destacado com uma linha mais grossa, é a soma dos comprimentos dos segmentos que formam o contorno. De acordo com a figura a seguir, este contorno é formado por quatro segmentos de comprimento x, quatro segmentos de comprimento y e quatro segmentos de comprimento z. Os valores de x e y foram dados no enunciado: $x = 45$ e $y = 10$ são os comprimentos dos lados de um dos quatro retângulos utilizados para formar a figura. Para obter o comprimento z observe que $z + 10 + 20 = x = 45$ e daí $z = 15$. Assim podemos concluir que o comprimento total do contorno da figura é igual a

$$4x + 4y + 4z = 4 \cdot 45 + 4 \cdot 10 + 4 \cdot 15 = 180 + 40 + 60 = 280 \text{ cm}.$$

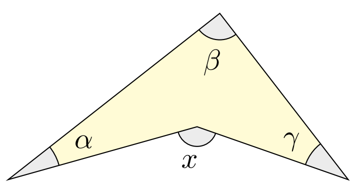


Exemplo 4: (OBMEP 2014 – N1Q10 – 1ª fase) Os irmãos Luiz e Lúcio compraram um terreno cercado por um muro de 340 metros. Eles construíram um muro interno para dividir o terreno em duas partes. A parte de Luiz ficou cercada por um muro de 260 metros e a de Lúcio, por um muro de 240 metros. Qual é o comprimento do muro interno?

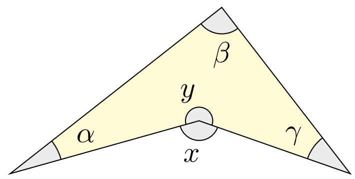


Solução. Somando as metragens dos muros de Luiz e de Lúcio, obtemos $240 + 260 = 500$ m. Neste total estão computados o comprimento do muro original (de 340 m) mais duas vezes o comprimento do muro interno. Logo, o comprimento do muro interno é igual a $\dfrac{500 - 340}{2} = 80$ m. Podemos também resolver algebricamente: como o muro interno pertence ao cercado dos terrenos de Luiz e de Lúcio, se x é a medida do muro interno, temos: $340 + 2x = 240 + 260$. Portanto $x = 80$ m.

Exemplo 5: Considere um quadrilátero e três dos seus ângulos internos α, β e γ. Além disso considere o ângulo x, do lado de fora do quadrilátero, exatamente no vértice em que não foi dado o valor do ângulo interno. Mostre que $x = \alpha + \beta + \gamma$. (Compare com o exemplo 11 da seção 5.3.)

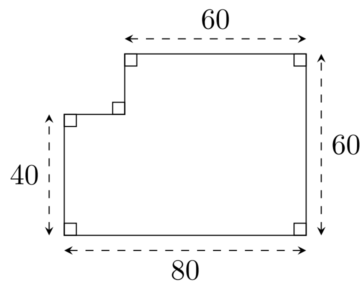


Solução. Seja y o ângulo interno do quadrilátero no vértice do ângulo x. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a $360°$, segue que $y + \alpha + \beta + \gamma = 360°$. Por outro lado, temos que $x + y = 360°$, pois os ângulos x e y somam uma volta completa. Daí temos que $\alpha + \beta + \gamma = 360° - y = x$.

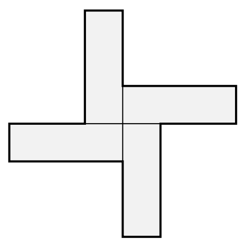


Exercícios:

1. **(OBMEP 2005 – N1Q8 – 1ª fase)** Daniela quer cercar o terreno representado pela figura. Nesta figura, dois lados consecutivos são sempre perpendiculares e as medidas de alguns lados estão indicadas em metros. Quantos metros de cerca Daniela terá que comprar?



2. **(OBMEP 2005 – N1Q1 – 2ª fase)** Tia Anastácia uniu quatro retângulos de papel de 3 cm de comprimento por 1 cm de largura, formando a figura a seguir.

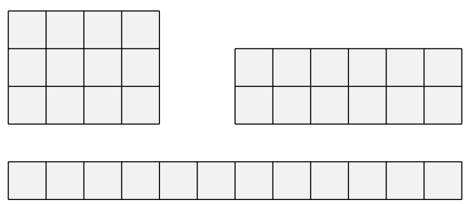


(A) Qual é o perímetro da figura?

(B) Qual é o menor número de retângulos de 3 cm de comprimento por 1 cm de largura que é necessário juntar a esta figura para se obter um quadrado? Faça um desenho ilustrando sua resposta.

(C) Qual é o comprimento do lado do quadrado obtido no item anterior?

3. Com 12 quadradinhos unitários podemos formar, a menos de simetrias, três tipos de retângulos: o retângulo 1×12, o retângulo 2×6 ou o retângulo 3×4.

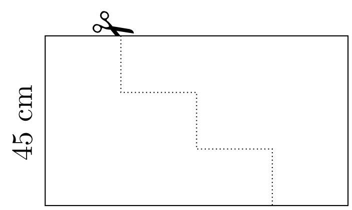


(a) Quantos tipos diferentes de retângulos podem ser formados com 54 quadradinhos unitários? Todos estes retângulos possuem o mesmo perímetro?

(b) E com 360 quadradinhos unitários, quantos tipos de retângulos podem ser formados?

(c) E se tivéssemos 784 quadradinhos unitários?

4. **(OBMEP 2007 – N1Q16 – 1ª fase)** Um retângulo de papelão com 45 cm de altura é recortado em dois pedaços iguais, ao longo da linha pontilhada, como na figura. Com estes dois pedaços é possível montar um quadrado de lado maior que 45 cm. Qual é o comprimento da base do retângulo?



5. **(OBMEP 2010 – N1Q5 – 2ª fase)** Marcelo cortou um quadrado de lado 6 cm em duas partes, como na Figura 1. O corte foi feito em formato de escada, com segmentos de 1 cm paralelos aos lados do quadrado.

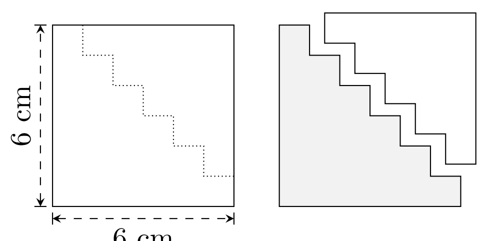


Figura 1

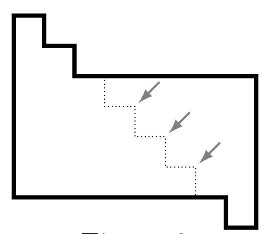


Figura 2

(A) Calcule o perímetro do polígono sombreado na Figura 1.

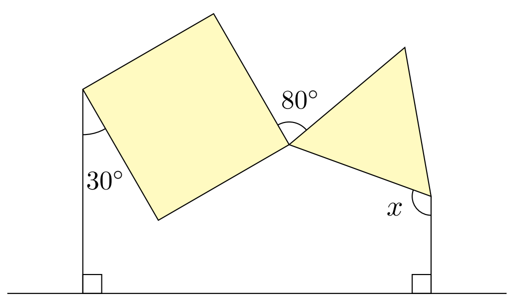
(B) A Figura 2 foi montada por Marcelo encaixando completamente três degraus (indicados com flechas) de uma das partes, na outra parte. Calcule o perímetro desta figura.

(C) Marcelo cortou da mesma maneira um quadrado de 87 cm de lado e montou uma figura encaixando 39 degraus de uma das partes na outra. Encontre o perímetro desta nova figura.

6. **(OBMEP 2011 – N2Q16 – 1ª fase)** Márcia cortou quatro tiras retangulares de mesma largura, cada uma de um dos lados de uma folha de papel medindo 30 cm por 50 cm. O perímetro do pedaço de papel que sobrou é 85% do perímetro da folha original. Qual é a largura das tiras?

7. (Banco de Questões 2007 – Nível 1 – Lista 6 – questão 7) Um quadrado de 1 m de lado foi cortado, com cortes paralelos aos seus lados, em quadradinhos de 1 mm de lado. Colocando-se lado a lado os quadradinhos, sem superposição, formou-se um retângulo de 1 mm de largura. Qual o comprimento desse retângulo?

8. Na figura a seguir, vemos um quadrado e um triângulo equilátero sombreados. Utilizando os dados da figura, determine a medida do ângulo x.



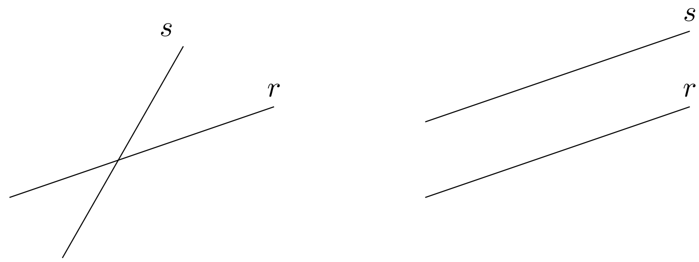
ENCONTRO 6

Os principais assuntos e os vídeos relacionados da parte de Geometria do canal PICOBMEP no YouTube que serão estudados neste encontro são:

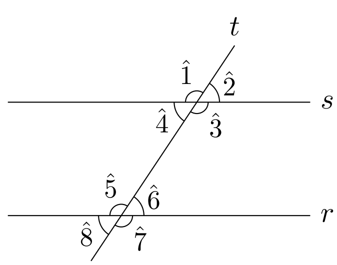
Assuntos	**Vídeos de Geometria: PICOBMEP no YouTube**
Posição relativa de duas retas. Retas paralelas cortadas por uma transversal: ângulos correspondentes, ângulos alternos internos, ângulos alternos externos, etc.	4, 15, 16, 17
Uma demonstração para o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo. Teorema do Ângulo Externo.	18
A circunferência e seus elementos: centro, raio, diâmetro, corda, arco.	43
Construção e caracterização de alguns lugares geométricos básicos com o objetivo de reforçar as definições de círculo, mediatriz, bissetriz, retas paralelas, etc.	28
Apresentação dos pontos notáveis de um triângulo (se possível utilizar um *software* de geometria dinâmica).	30, 31, 32, 38, 39

6.1 Retas paralelas cortadas por uma transversal

Por dois pontos distintos no plano passa uma e somente uma reta. Deste modo, dadas duas retas distintas no plano, ou elas possuem um único ponto em comum, ou elas não possuem ponto em comum. No primeiro caso elas são chamadas de **concorrentes** e no segundo caso elas são **paralelas**. Na figura a seguir vemos, respectivamente duas retas concorrentes e duas retas paralelas r e s. Observamos que as posições relativas entre retas estão discutidas no vídeo 4 da parte de Geometria do canal PICOBMEP no YouTube.



Agora vamos considerar duas retas no plano, como as retas r e s representadas na figura anterior à direita. Analisando uma figura como esta, se nada foi dito previamente sobre as retas r e s, podemos concluir que as retas r e s são paralelas? Pense sobre isso e observe que como as retas são infinitas e vemos apenas uma pequena parte delas, então é impossível concluir se elas são paralelas ou concorrentes através da análise de uma ilustração. Para decidir sobre qual é a posição relativa de r e s é necessário obter alguma informação geométrica mais precisa. Uma maneira de fazer isso é traçar uma reta t transversal às retas r e s. Na figura a seguir vemos exatamente esta situação, onde estão ilustradas duas retas r e s ambas cortadas por uma reta transversal t.

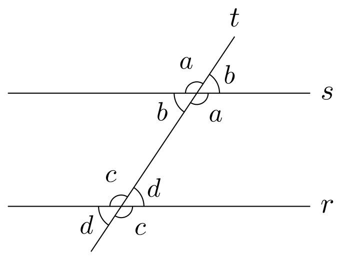


Para caracterizar o paralelismo das retas r e s, vamos comparar os ângulos formados pelas retas r e t com os ângulos formados pelas retas s e t. Para a comparação de dois desses ângulos, dependendo se eles estão de um mesmo lado da transversal t e dependendo se eles estão entre as retas r e s (interior) ou se eles não estão entre as retas r e s (exterior) é utilizada a seguinte nomenclatura (veja o vídeo 15 da parte de Geometria do canal PICOBMEP no YouTube).

- Os ângulos $\hat{2}$ e $\hat{6}$ são correspondentes.
- Os ângulos $\hat{3}$ e $\hat{5}$ são alternos internos.
- Os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{7}$ são alternos externos.
- Os ângulos $\hat{3}$ e $\hat{6}$ são colaterais internos.
- Os ângulos $\hat{2}$ e $\hat{7}$ são colaterais externos.

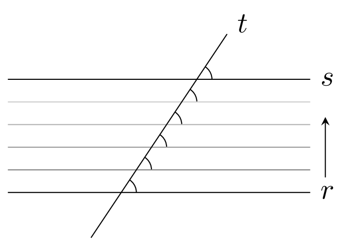
Nesta figura existem outros pares de ângulos correspondentes, alternos internos, alternos externos, etc. O que importa é a posição relativa dos dois ângulos analisados. Por exemplo, os ângulos $\hat{4}$ e $\hat{8}$ são correspondentes, pois ambos estão de um mesmo lado da reta t e ambos estão abaixo das retas r e s. Já os ângulos $\hat{4}$ e $\hat{6}$ são alternos internos, pois cada um deles está de um lado da reta t e ambos estão entre as retas r e s. No Exercício 1 desta seção, procedendo de modo análogo, você será convidado a classificar outros pares de ângulos desta mesma figura.

Como ângulos opostos pelo vértice possuem a mesma medida, de fato, na figura anterior podem aparecer apenas 4 ângulos diferentes, indicados com as letras a, b, c e d na figura a seguir.



Vamos analisar agora o paralelismo das retas r e s em termos destes ângulos a, b, c e d.

Movendo paralelamente uma reta r ao longo de uma reta transversal t, vemos que os ângulos que r formam com t não se modificam ao longo deste movimento (veja figura a seguir). Assim se r e s são retas paralelas cortadas por uma reta transversal t, então os ângulos entre r e t são iguais aos respectivos ângulos entre s e t. Logo, ângulos correspondentes são iguais, ângulos alternos internos são iguais e assim por diante. Além disso, por outro lado, podemos mostrar que, quando os ângulos entre r e t possuem as mesmas medidas dos respectivos ângulos entre as retas s e t, então as retas r e s são paralelas. Deste modo, em relação a figura anterior, dizer que as retas r e s são paralelas é o mesmo que dizer que $a = c$ e $b = d$.

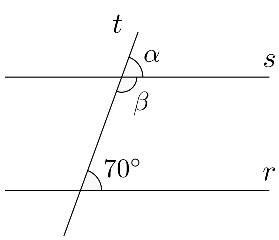


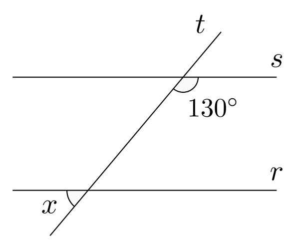
Resumindo, podemos enunciar o seguinte resultado que caracteriza quando duas retas são paralelas através da comparação dos ângulos formados por estas retas e uma terceira reta transversal.

Teorema: *No plano sejam r e s duas retas cortadas por uma transversal t. As retas r e s são paralelas quando elas determinam com a reta t ângulos correspondentes (ou ângulos alternos internos) de mesma medida.*

Vamos utilizar este teorema na solução de alguns exemplos.

Exemplo 1: Em cada uma das figuras a seguir, observando os ângulos entre as retas paralelas r e s com a transversal t, calcule as medidas dos ângulos indicados por letras.

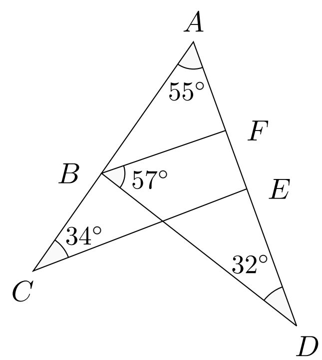




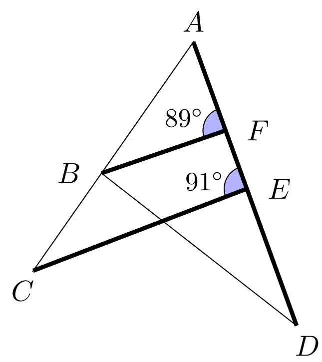
Solução. Na figura da esquerda os ângulos 70° e α são ângulos correspondentes. Como as retas r e s são paralelas, estes ângulos possuem a mesma medida e assim $\alpha = 70°$. Agora observe que os ângulos α e β são ângulos suplementares. Daí $\beta = 180° - \alpha = 180° - 70° = 110°$. Nesta figura os ângulos 70° e β são ângulos colaterais internos. Observe que na solução deste exercício mostramos que ângulos colaterais internos de retas paralelas cortadas por uma transversal são ângulos suplementares.

Para a outra figura observe, à esquerda do ângulo de 130°, o seu ângulo suplementar $50° = 180° - 130°$. Os ângulos 50° e x são ângulos correspondentes. Daí, como as retas r e s são paralelas e neste caso ângulos correspondentes possuem a mesma medida, podemos concluir que $x = 50°$.

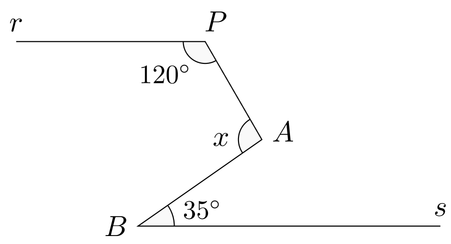
Exemplo 2: Na figura a seguir, os pontos A, F, E e D estão alinhados assim como os pontos A, B e C também estão alinhados. As retas CE e BF são paralelas?



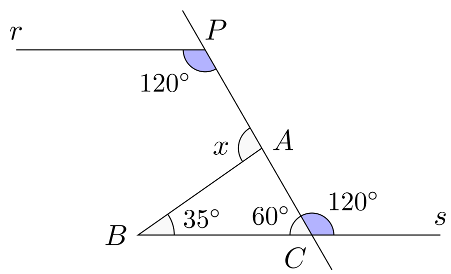
Solução. No triângulo BFD vemos que $B\hat{F}D = 180° - (57° - 32°) = 91°$. Daí segue que $B\hat{F}A = 180° - 91° = 89°$. E no triângulo CEA vemos que $C\hat{E}A = 180° - (34° + 55°) = 91°$. Como as retas CE e BF possuem ângulos correspondentes $B\hat{F}A = 89°$ e $C\hat{E}A = 91°$ diferentes quando cortadas pela transversal AD, segue que elas não são retas paralelas.



Exemplo 3: Na figura a seguir, as retas r e s são paralelas. Qual é a medida do ângulo x?

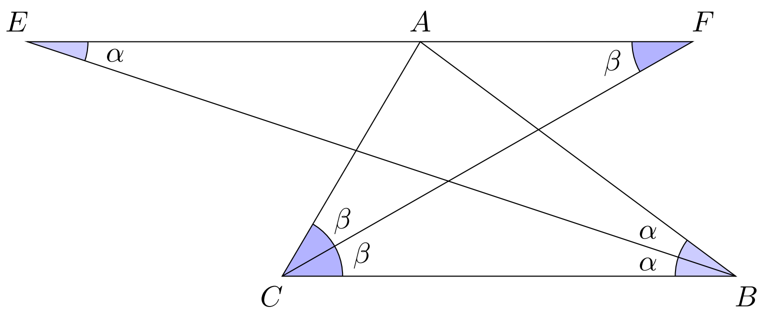


Solução. Prolongue o segmento PA até ele encontrar a reta s em um ponto C. Como as retas r e s são paralelas, podemos identificar os dois ângulos alternos internos de $120°$ indicados na figura a seguir.



Olhando o ângulo raso no vértice C, concluímos que $A\hat{C}B = 60°$, pois este é o suplementar do ângulo adjacente de $120°$. No triângulo ABC, x é ângulo externo não adjacente aos ângulos internos de $35°$ e de $60°$. Daí $x = 35° + 60° = 95°$.

Exemplo 4: (Banco de Questões 2011 – Nível 2 – questão 55) Seja ABC um triângulo com $AB = 13$, $BC = 15$ e $AC = 9$. Seja r a reta paralela a BC traçada por A. A bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$ corta a reta r em E e a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ corta r em F. Calcular a medida do segmento EF.



Solução. Como a reta EF é paralela ao lado BC, os ângulos alternos internos gerados pela transversal CF são iguais, isto é, $F\hat{C}B = C\hat{F}A$. Por outro lado, como CF é bissetriz, temos que $F\hat{C}B = F\hat{C}A$ e assim, $F\hat{C}A = C\hat{F}A$, donde o triângulo CAF é isósceles de base CF. Portanto, $AF = AC = 9$.

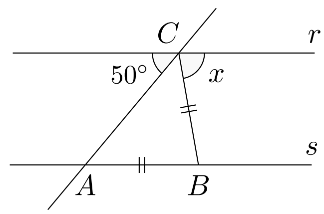
Analogamente, concluímos que o triângulo BAE é isósceles de base BE e $AE = AB = 13$. Assim, $EF = EA + AF = 13 + 9 = 22$.

Exercícios:

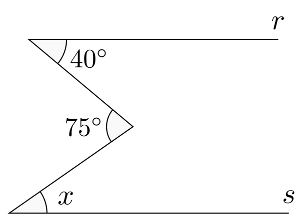
1. Observando a figura da página 51, em cada item classifique os pares de ângulos como: ângulos correspondentes, ângulos alternos internos, ângulos alternos externos, ângulos colaterais internos ou colaterais externos.

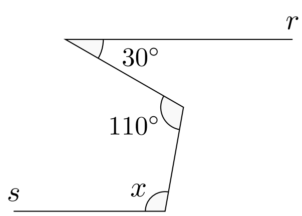
   (a) ângulos $\hat{4}$ e $\hat{5}$.
   (b) ângulos $\hat{3}$ e $\hat{7}$.
   (c) ângulos $\hat{2}$ e $\hat{8}$.
   (d) ângulos $\hat{4}$ e $\hat{6}$.
   (e) ângulos $\hat{1}$ e $\hat{8}$.

2. Na figura a seguir, as retas r e s são paralelas. Se $\overline{AB} = \overline{CB}$, determine a medida do ângulo x.

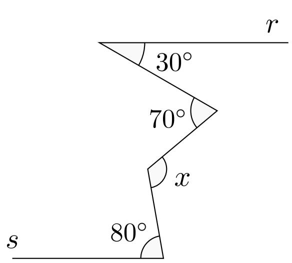


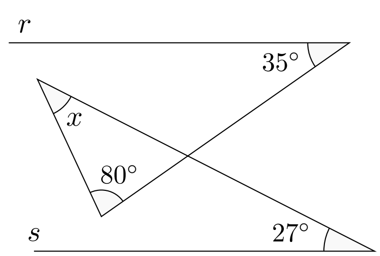
3. Em cada figura, determine a medida do ângulo x sabendo que as retas r e s são paralelas.



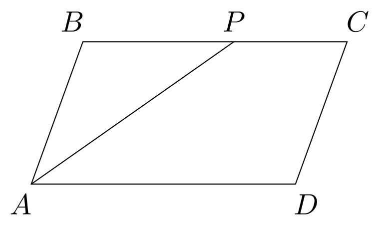


4. Determine a medida do ângulo x sabendo que as retas r e s são paralelas.

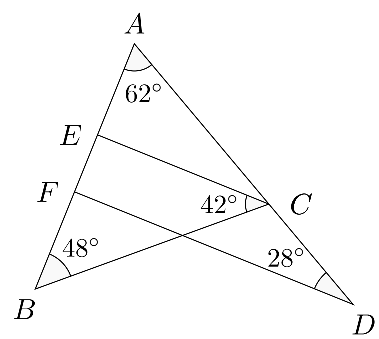




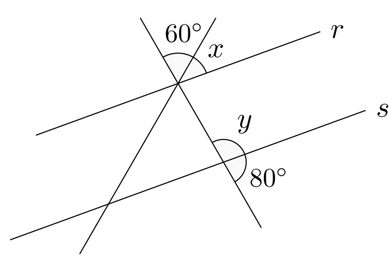
5. Sendo $ABCD$ um paralelogramo, AP bissetriz do ângulo $\hat{A}$, $\overline{AB} =$ 7 cm e $\overline{PC} = 3$ cm, determine o perímetro do paralelogramo.



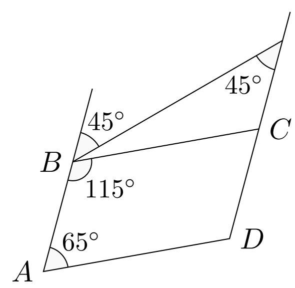
6. (Banco de Questões 2010, Nível 2, problema 61, página 46) Na figura dada, as retas EC e FD serão paralelas?



7. (Banco de Questões 2010, Nível 2, problema 74, página 48) Sabe-se que as retas r e s são paralelas. Determine as medidas dos ângulos x e y.



8. (Banco de Questões 2010, Nível 2, problema 89, página 50) O quadrilátero $ABCD$ da figura é um paralelogramo?

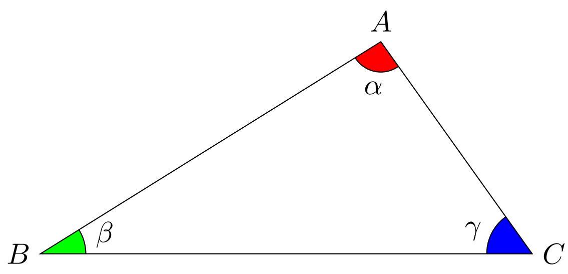


9. No vídeo 15 da parte de Geometria do canal PICOBMEP no YouTube é apresentado um problema de travessia de um rio. Assista este vídeo e resolva este problema utilizando os conhecimentos aprendidos nesta aula sobre ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Em seguida, compare sua solução com as soluções apresentadas no vídeo 16.

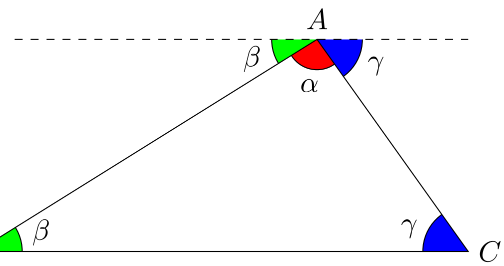
6.2 A soma dos ângulos internos de um triângulo

No encontro anterior, através de uma atividade com dobraduras, vimos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Naquele encontro não tínhamos as ferramentas necessárias para apresentar uma demonstração mais detalhada deste fato e prometemos que ela seria apresentada neste encontro. O objetivo desta seção é, então, apresentar uma demonstração deste teorema como uma aplicação das propriedades dos ângulos alternos internos estudadas na seção anterior. Para dizer a verdade, no fundo, estamos utilizando o Axioma das Paralelas (estude esta demonstração também no vídeo 18).

Seja ABC um triângulo com ângulos internos α, β e γ, como ilustrado na figura a seguir.

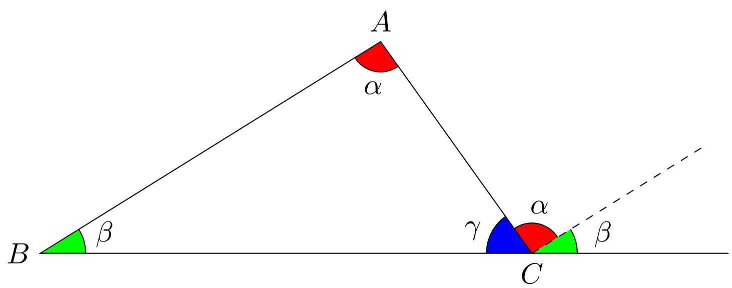


Traçando pelo vértice A a reta paralela ao segmento BC, identificamos os ângulos alternos internos de medida β e também identificamos os ângulos alternos internos de medida γ, como indicado na figura a seguir.



Fazendo esta construção, obtemos no vértice A um ângulo raso que é igual a soma dos ângulos adjacentes β, α e γ. Isto significa que $\alpha+\beta+\gamma = 180°$ e, portanto, concluímos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$.

Aproveitando este contexto também podemos fazer uma construção para demonstrar o Teorema do Ângulo Externo que nos diz que em um triângulo um ângulo externo é igual a soma dos dois ângulos internos não adjacentes. De fato, traçando pelo vértice C, como indicado na figura a seguir, uma reta paralela ao segmento AB, identificamos os ângulos alternos internos de medida α e os ângulos correspondentes de medida β.

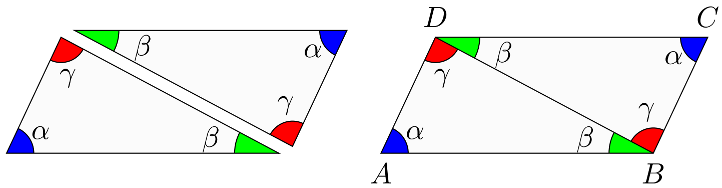


Estes dois ângulos adjacentes α e β que foram construídos com o auxílio da paralela somam exatamente o ângulo externo no vértice C. Portanto, este ângulo externo é igual a soma $\alpha + \beta$ dos dois ângulos internos não adjacentes.

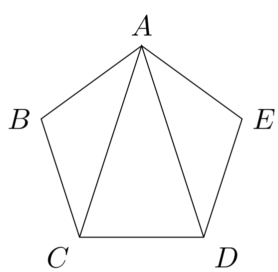
Para finalizar, podemos aproveitar a figura anterior para mostrar, de outro modo ainda, que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$. De fato, observe que nessa figura, no vértice C, existe um ângulo raso que é igual a $\alpha + \beta + \gamma$. Isto significa que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Exercícios:

1. A figura da esquerda ilustra como podemos juntar duas cópias de um mesmo triângulo para obter o quadrilátero $ABCD$ da figura da direita. Mostre que este quadrilátero é um paralelogramo. Ou seja, mostre que as retas AB e CD são paralelas e também mostre que as retas AD e BC são paralelas.

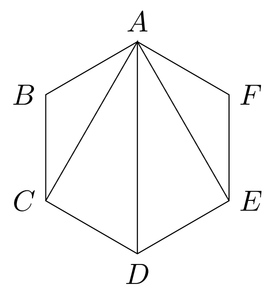


2. Na figura a seguir vemos um pentágono regular $ABCDE$. Traçando as diagonais do pentágono pelo vértice A, ele fica dividido em três triângulos. Observando que a soma dos ângulos destes triângulos é igual a soma dos ângulos internos do pentágono, determine a soma dos ângulos internos de um pentágono regular.

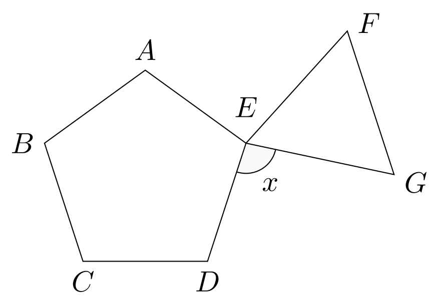


3. No exercício anterior demonstramos que a soma dos ângulos internos de um pentágono regular é igual a $540°$. Qual é a medida de cada um dos ângulos internos de um pentágono regular?

4. Repita os exercícios anteriores para um hexágono regular $ABCDEF$. Isto é, determine a soma dos ângulos internos de um hexágono regular e, em seguida, determine o valor de cada um dos ângulos internos de um hexágono regular.



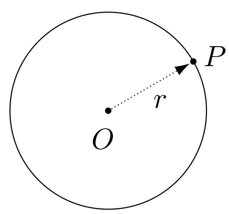
5. Na figura a seguir, vemos um pentágono regular $ABCDE$ e um triângulo equilátero EFG unidos pelo vértice comum E. Determine a medida do ângulo $x = D\hat{E}G$ para que os lados BC e FG estejam contidos em retas paralelas.



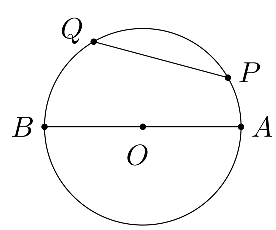
6.3 A circunferência e alguns dos seus elementos

O objetivo desta seção é apresentar o conceito de circunferência e os conceitos de outros elementos relacionados a uma circunferência. Estes conceitos são importantes, pois eles podem aparecer em problemas relacionados com as mais variadas formas geométricas. Deste modo, é importante você conhecer os conceitos e as propriedades mais importantes relacionadas a uma circunferência. Sugerimos fortemente que o estudo desta seção seja acompanhado do estudo do vídeo 43 da parte de Geometria do canal PICOBMEP no YouTube.

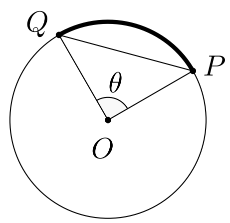
Dado um ponto O e dado um número real $r > 0$, a **circunferência** de **centro** O e **raio** r é o conjunto dos pontos do plano que estão à distância r de O. Ou seja, um ponto P pertence à esta circunferência quando $\overline{OP} = r$.



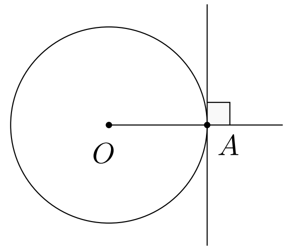
Um **raio** da circunferência também é um segmento OP que liga um ponto da circunferência ao seu centro. Um segmento PQ que liga dois pontos de uma circunferência é uma **corda** da circunferência. Em particular, quando uma corda AB passa pelo centro da circunferência ela é chamada de **diâmetro**. Observe que o comprimento de um diâmetro é igual ao dobro do raio da circunferência.



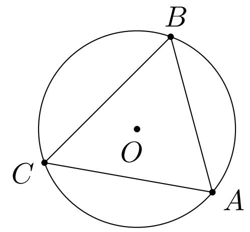
Uma corda PQ divide uma circunferência em duas partes. Cada uma destas partes é um **arco** da circunferência. Para medir a abertura de um arco utilizamos o **ângulo central** $P\hat{O}Q$. Do modo como está indicado na figura a seguir, dizemos que o ângulo central $\theta = P\hat{O}Q$ **enxerga** o arco $\widehat{PQ}$ que está destacado com uma linha mais grossa.



Dado um raio OA de uma circunferência, a reta perpendicular a reta $\overleftrightarrow{OA}$ no ponto A é a **reta tangente** à circunferência no ponto A. Observe que uma reta tangente a uma circunferência encontra a circunferência em um único ponto. De fato, se essa reta tocasse a circunferência em um outro ponto B, então o triângulo OAB seria isósceles com $OA = OB$ e, portanto, com dois ângulos retos $\hat{A} = \hat{B} = 90°$, o que é um absurdo.



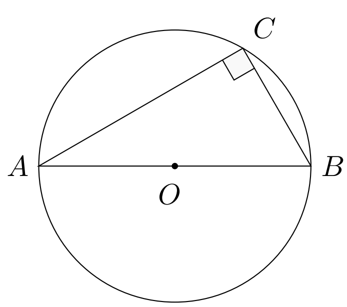
Quando um triângulo ABC possui os seus vértices sobre uma circunferência, dizemos que o triângulo está **inscrito** nesta circunferência. De outro modo, também dizemos que essa é a circunferência **circunscrita** ao triângulo ABC.



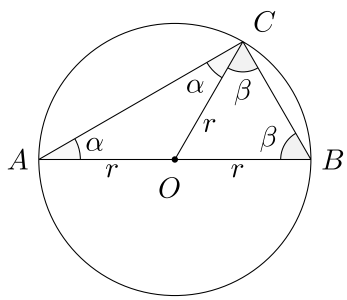
Finalmente, para encerrar esta seção de definições sobre a circunferência e os seus elementos, vamos demonstrar uma relação importante entre circunferências e triângulos retângulos.

Lembre-se de que um triângulo é retângulo quando ele possui um ângulo reto. Se ABC é um triângulo retângulo no vértice C, os lados AC e BC que chegam no vértice do ângulo reto são chamados de **catetos** e o lado AB, que não chega no ângulo reto, é chamado de **hipotenusa** do triângulo retângulo ABC.

Agora considere um triângulo ABC e sua circunferência circunscrita. Vamos mostrar que se um dos lados do triângulo, por exemplo o lado AB, é um diâmetro desta circunferência, então o triângulo é retângulo.



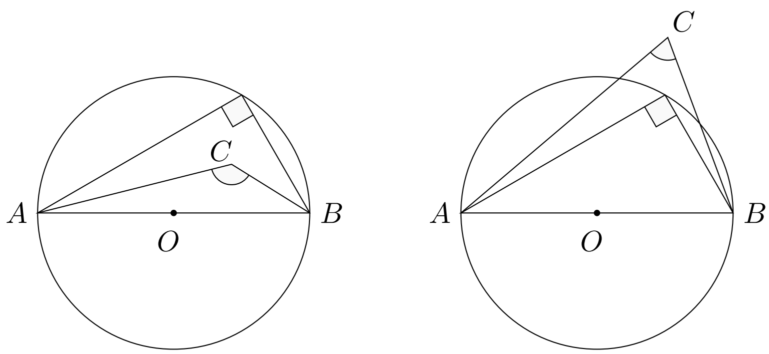
De fato, traçando o segmento OC obtemos dois triângulos isósceles AOC e BOC. Nestes triângulos os lados iguais $OA = OB = OC$ são raios da circunferência.



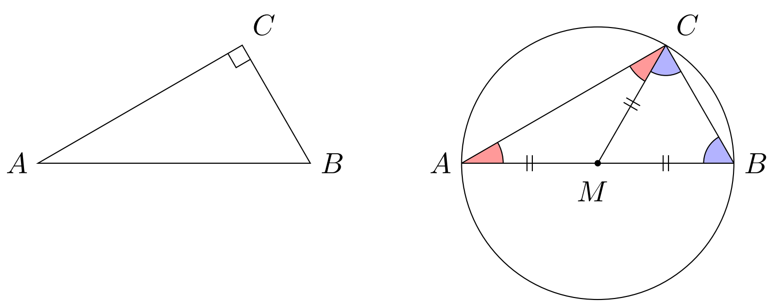
Se no triângulo ABC chamamos $\alpha = \hat{A}$ e $\beta = \hat{B}$, utilizando o fato que um triângulo isósceles possui os ângulos da base de mesma medida, podemos concluir que no vértice C, o ângulo interno do triângulo ABC é $\hat{C} = \alpha+\beta$. Daí, somando os ângulos internos do triângulo ABC obtemos $\alpha+\beta+(\alpha+\beta) = 180°$. Desta relação segue que $2\alpha+2\beta = 180°$ e dividindo por 2 obtemos $\hat{C} = \alpha + \beta = 90°$. Portanto, o ângulo no vértice C é reto e isto significa que o triângulo ABC é retângulo no vértice C.

Mais ainda, em um triângulo ABC podemos verificar se o ângulo no vértice C é obtuso, reto ou agudo analisando a posição do vértice C em relação a circunferência de diâmetro AB.

- Se C está no interior da circunferência então $\hat{C} > 90°$.
- Se C está sobre a circunferência então $\hat{C} = 90°$.
- Se C está no exterior da circunferência então $\hat{C} < 90°$.

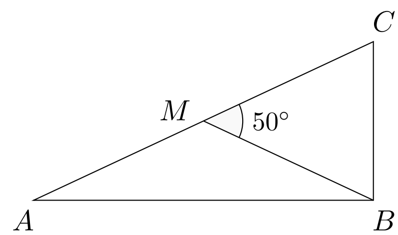


Como uma consequência do que acabamos de discutir podemos concluir mais uma propriedade dos triângulos retângulos. Seja ABC um triângulo retângulo no vértice C. Se M é o ponto médio da hipotenusa AB então a circunferência de centro M e diâmetro AB passa pelo vértice C. Daí $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$ são raios desta circunferência e, portanto, os triângulos AMC e BMC são triângulos isósceles.

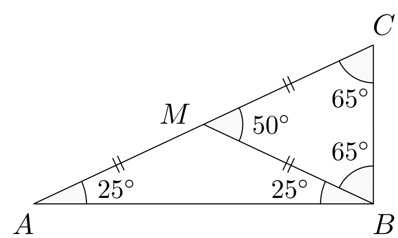


Vejamos agora alguns exemplos resolvidos com a teoria desenvolvida nesta seção.

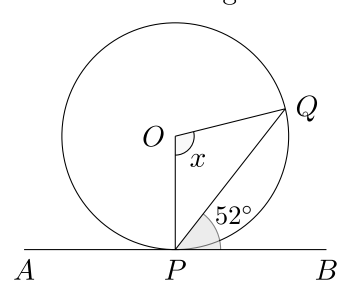
Exemplo 1: Na figura a seguir ABC é um triângulo retângulo em B. Se M é o ponto médio da hipotenusa e se $B\hat{M}C = 50°$, calcule as medidas dos ângulos agudos do triângulo ABC.



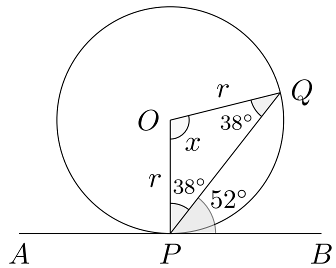
Solução. Sabemos que os triângulos AMB e BMC são triângulos isósceles com $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$. No triângulo AMB, o ângulo de $50°$ é ângulo externo não adjacente aos ângulos iguais $M\hat{A}B$ e $M\hat{B}A$. Daí cada um destes ângulos possui medida igual a $50° \div 2 = 25°$. Como o triângulo ABC tem um ângulo agudo de $25°$, o outro ângulo agudo deve medir $A\hat{C}B = 90° - 25° = 65°$.



Exemplo 2: Na figura a seguir a reta AB é tangente a circunferência de centro O no ponto P. Se Q é um ponto da circunferência tal que $Q\hat{P}B = 52°$, determine a medida do ângulo $x = P\hat{O}Q$.

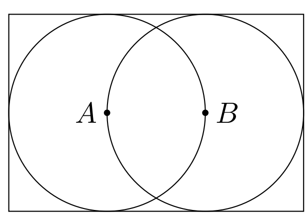


Solução. A reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio que termina no ponto de tangência. Isto significa que as retas OP e AB são perpendiculares, ou seja, $O\hat{P}B = 90°$. Assim os ângulos $O\hat{P}Q$ e $Q\hat{P}B$ são complementares e, portanto, $O\hat{P}Q = 90° - 52° = 38°$. Agora observe que o triângulo OPQ é isósceles, pois possui dois lados iguais ao raio da circunferência. Daí $O\hat{Q}P = O\hat{P}Q = 38°$. Como a soma dos ângulos internos do triângulo OPQ é igual a $180°$, vemos que $x = 180° - 38° - 38° = 104°$.

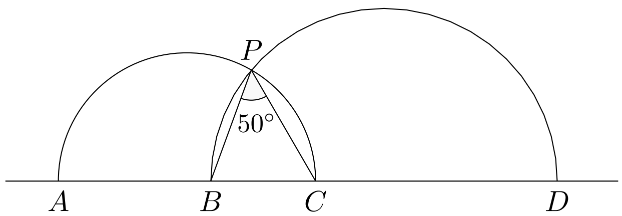


Exercícios:

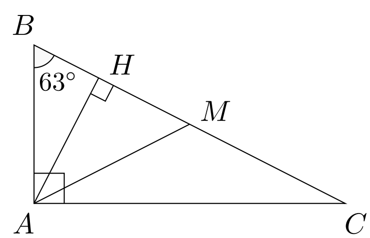
1. Na figura a seguir, a circunferência de centro A passa por B, a circunferência de centro B passa por A e, além disso, estas duas circunferências são tangentes aos lados do retângulo. Se as circunferências possuem raios de 4 cm, determine o perímetro do retângulo.



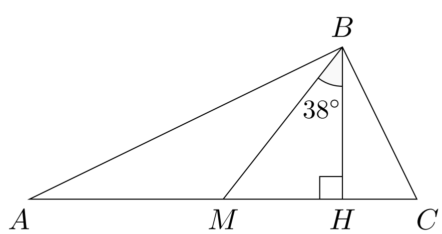
2. Na figura a seguir, A, B, C e D são pontos alinhados e o ponto P está na interseção da circunferência de diâmetro AC com a circunferência de diâmetro BD. Se $B\hat{P}C = 50°$, determine a medida do ângulo $A\hat{P}D$.



3. Na figura a seguir, vemos um triângulo retângulo ABC com um ângulo de $63°$ no vértice B. O ponto M é o ponto médio de BC e o ponto H sobre a hipotenusa é tal que os segmentos AH e BC são perpendiculares. Calcule a medida do ângulo $M\hat{A}H$.

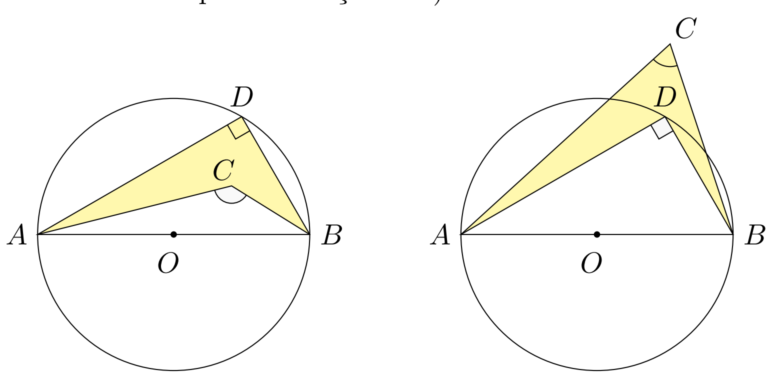


4. Na figura a seguir, ABC é um triângulo retângulo no vértice B, M é ponto médio de AC e $M\hat{B}H = 38°$. Determine as medidas dos ângulos agudos do triângulo ABC.



“geometria˙diagra
2015/7/22
page 73
Estilo OBMEP

5. Na página 68 observamos que em um triângulo ABC o ângulo no vértice C pode ser obtuso, reto ou agudo dependendo se C está, respectivamente, no interior, sobre ou no exterior da circunferência de diâmetro AB. Agora, neste exercício, queremos que você demonstre essa afirmação. Ou seja, na figura a seguir à esquerda, demonstre que o ângulo marcado C é obtuso. Na figura a seguir à direita demonstre que o ângulo marcado C é agudo. (Sugestão: nas figuras a seguir observe o quadrilátero $ACBD$ e utilize a conclusão do exemplo 5 da seção 5.4.)



6.4 Lugares geométricos

O objetivo desta seção é trabalhar o conceito, a construção e a caracterização de um lugar geométrico, que nada mais é do que o conjunto de todos os pontos que satisfazem uma dada propriedade. Através do estudo de um certo lugar geométrico, estamos interessados em favorecer o entendimento de algumas figuras muito importantes como a circunferência, a mediatriz e a bissetriz que, em muitos casos, aparecem como ferramentas importantes para a construção de um lugar geométrico mais complicado. Além disso, nos exercícios desta seção, desejamos que os alunos soltem a imaginação e a experimentação, fazendo suas próprias descobertas na tentativa de construir uma figura a partir das suas propriedades.

Definição: Lugar geométrico é um conjunto de pontos caracterizado por uma propriedade. Deste modo, uma figura descrita por uma propriedade é um lugar geométrico se:

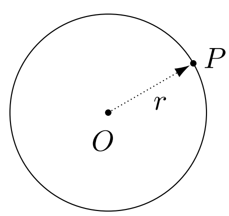
(a) Todos os pontos da figura têm a propriedade.

(b) Somente os pontos da figura têm a propriedade.

Vejamos alguns exemplos de lugares geométricos.

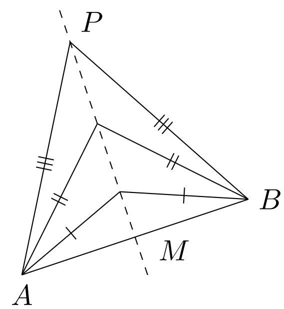
- **A circunferência**

  Dado um número positivo r e dado um ponto O, o lugar geométrico dos pontos do plano que distam r do ponto O é a circunferência de centro O e raio r.



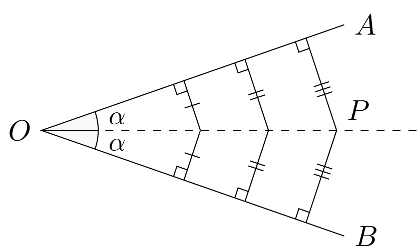
- **A reta mediatriz**

  Dado um segmento AB, o conjunto dos pontos P do plano tais que $\overline{PA} = \overline{PB}$ é a mediatriz do segmento AB. Ou seja, ela é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de A e de B. Pode-se demonstrar que a mediatriz do segmento AB é a reta perpendicular que passa pelo seu ponto médio do segmento AB.



- **A bissetriz**

  A bissetriz de um ângulo $A\hat{O}B$ é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes dos lados desse ângulo. Isto é, P pertence à bissetriz se a distância de P à reta $\overleftrightarrow{OA}$ é igual a distância de P à reta $\overleftrightarrow{OB}$. Pode-se demonstrar que a bissetriz $\overrightarrow{OP}$ é a reta que divide o ângulo $A\hat{O}B$ em dois ângulos de mesma medida.

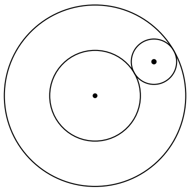


Seguem alguns exercícios a respeito de descrições de lugares geométricos. Observamos que, caso seja possível, parece ser interessante explorar a construção e a visualização destas figuras em um *software* de geometria dinâmica, como o GeoGebra.

Exercícios:

1. Descreva o lugar geométrico dos centros das circunferências de raio R, que passam por um ponto fixo A.

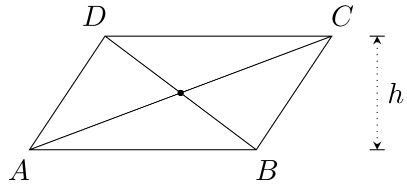
2. Descreva o lugar geométrico dos centros das circunferências tangentes a duas circunferências concêntricas dadas.



3. Descreva o lugar geométrico do centro O das circunferências tangentes a duas retas concorrentes r e s.

4. Qual é o lugar geométrico dos centros das circunferências tangentes a duas retas paralelas?

5. Fixe um segmento AB no plano e considere um número positivo h. Determine o lugar geométrico dos pontos de interseção das diagonais dos paralelogramos $ABCD$ de base AB e altura h.



6. Fixe um segmento BC no plano e fixe um comprimento $h > 0$. Determine o lugar geométrico do vértice A de um triângulo ABC de base BC e de altura h em relação a esta base.

7. Determine o lugar geométrico descrito pelo centro de uma circunferência de raio R quando ela rola sobre uma reta r.

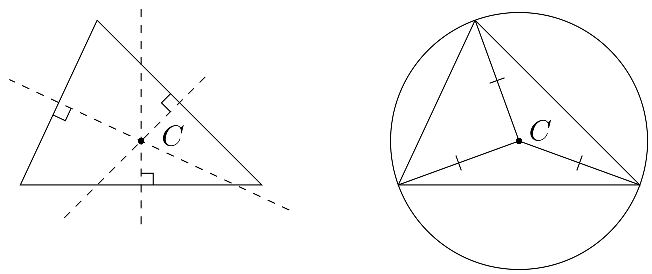
8. Duas circunferências de raios R e r, com $R > r$, rolam sem deslizar sobre uma reta m. Determine o lugar geométrico descrito pelos seus centros.

6.5 Pontos notáveis de um triângulo

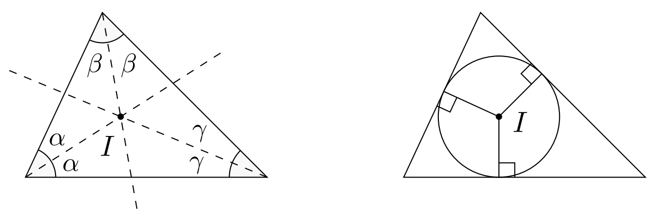
Nesta seção vamos apresentar os principais pontos notáveis de um triângulo: circuncentro, incentro, baricentro e ortocentro. O incentro e o circuncentro de um triângulo são importantes pois, com eles, pode-se construir a circunferência inscrita e a circunferência circunscrita ao triângulo. Observamos que as construções destas circunferências ficam mais interessantes com a utilização de instrumentos como a régua e o compasso ou com a utilização de um *software* de geometria dinâmica como o GeoGebra. Deste modo, esta seção também tem como objetivo oportunizar o uso de instrumentos de construção geométrica na sala de aula ou o uso de um *software* de geometria dinâmica no Fórum Hotel de Hilbert.

Considere um triângulo qualquer no plano.

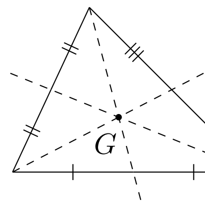
- **Circuncentro.** A reta mediatriz de um lado do triângulo é a reta perpendicular a este lado e que passa pelo seu ponto médio. Um triângulo possui três retas mediatrizes, uma para cada lado. O ponto de interseção destas três retas está a igual distância dos vértices do triângulo. Ele é chamado de circuncentro e é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, que é a circunferência que passa pelos vértices do triângulo.



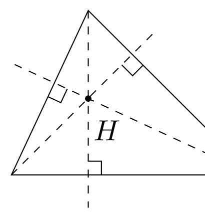
- **Incentro.** A reta bissetriz de um dos ângulos internos do triângulo é a reta que passa pelo vértice do triângulo e que divide o ângulo do triângulo em dois ângulos de mesma medida. Um triângulo possui três retas bissetrizes, uma para cada um dos seus ângulos internos. O ponto de interseção destas três retas está a igual distância dos lados do triângulo e ele é o centro da circunferência inscrita no triângulo, que é a circunferência tangente aos lados.



- **Baricentro.** Uma reta mediana de um triângulo é a reta que passa por um dos vértices do triângulo e também passa pelo ponto médio do lado oposto a este vértice. Como um triângulo possui três vértices, ele possui três retas medianas. O ponto de interseção destas três retas é chamado de baricentro do triângulo.



- **Ortocentro.** A altura de um triângulo, em relação a um de seus lados, é a reta que passa por um dos vértices do triângulo e que é perpendicular a reta que contém o lado oposto a este vértice. Como um triângulo possui três vértices, ele possui três alturas. O ponto de interseção das três alturas é o ortocentro do triângulo.



No vídeo 38 do canal PICOBMEP no YouTube estão definidos o incentro e o circuncentro de um triângulo. Além disso, de uma maneira bastante interessante, um triângulo é caracterizado como acutângulo, obtusângulo ou retângulo de acordo com a posição do seu circuncentro: interior ao triângulo, exterior ao triângulo ou sobre um dos lados do triângulo, respectivamente. Vale a pena assistir a este vídeo!

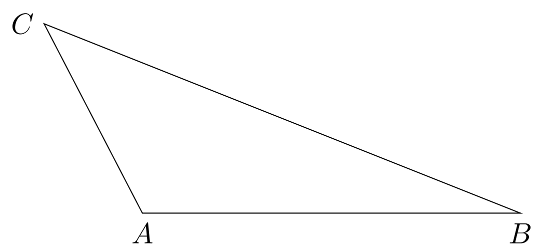
No vídeo 39 é demonstrado que as três alturas de um triângulo são concorrentes em um único ponto, o ortocentro. Além disso, o triângulo é caracterizado como retângulo, acutângulo e obtusângulo de acordo com a posição do seu ortocentro: sobre um dos vértices, no interior do triângulo ou exterior ao triângulo, respectivamente.

Exercícios:

1. Utilizando duas folhas de papel, copie o triângulo da figura a seguir duas vezes, uma em cada folha.

   (a) Em uma das folhas, com o auxílio de uma régua, de um compasso ou de um esquadro, desenhe as três alturas desse triângulo e identifique o seu ortocentro.

   (b) Na outra folha, desenhe as três mediatrizes do triângulo e identifique o seu circuncentro.



2. Classifique cada afirmativa como verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

   (a) O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

   (b) O incentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

   (c) O incentro é sempre interno ao triângulo.

   (d) O baricentro é sempre interno ao triângulo.

   (e) O ortocentro é sempre interno ao triângulo.

   (f) O circuncentro é sempre interno ao triângulo.

   (g) O baricentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

3. Considerando os quatro pontos notáveis de um triângulo.

    (a) Quais sempre estão no interior do triângulo?

    (b) Quais podem ser externos ao triângulo?

    (c) Qual pode ser ponto médio de um lado?

    (d) Qual pode ser vértice do triângulo?

4. Se H é ortocentro de um triângulo isósceles ABC de base BC e $B\hat{H}C = 50°$, determine os ângulos do triângulo.

5. Se P é incentro de um triângulo ABC e $B\hat{P}C = 125°$, determine a medida do ângulo $\hat{A}$.

6. Sendo H o ortocentro do triângulo ABC e $B\hat{H}C = 150°$, determine $\hat{A}$.

7. Em um triângulo ABC, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ medem, respectivamente, $86°$ e $34°$. Determine o ângulo agudo formado pela mediatriz relativa ao lado BC e pela bissetriz do ângulo $\hat{C}$.

ENCONTRO 7

Neste encontro pretende-se:

- Apresentar os conceitos de área e perímetro de figuras planas.
- Deduzir as expressões para as áreas do quadrado, retângulo, triângulo, paralelogramo e trapézio.
- Resolver problemas de cálculo de áreas e perímetros.

No canal PICOBMEP no YouTube existem vídeos de Aritmética, de Contagem, de Geometria e de Indução Finita. Para utilizar estes vídeos é importante observar que em cada uma destas divisões os vídeos começam numerados com o número 1. Consultando a parte de Geometria, os vídeos 51, 52, 56 e 57 tratam dos assuntos que serão estudados neste e no próximo encontro presencial: áreas e o Teorema de Pitágoras. Sugerimos que o estudo da apostila seja acompanhado da visualização atenta destes vídeos.

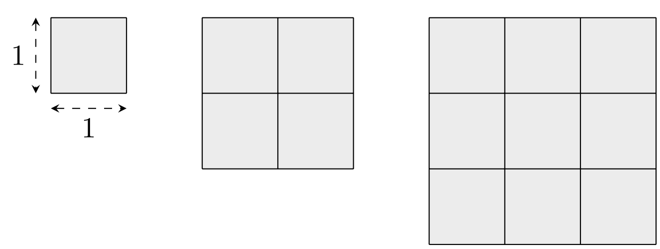
Por outro lado, no Portal da Matemática existe uma coleção muito variada de vídeos disponibilizados para estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio. Em particular no módulo Áreas de Figuras Planas do 9º Ano do Ensino Fundamental podem ser encontrados 15 vídeos relacionados com os assuntos deste encontro presencial. Vale a pena dar uma olhada!

7.1 Área: conceito e áreas do quadrado e do retângulo

Dada uma figura no plano, vamos definir a área desta figura como o resultado da comparação da figura dada com uma certa unidade de medida. No caso do conceito de área de figuras planas, a unidade de medida utilizada é um quadrado de lado 1 (uma unidade de comprimento). Assim um quadrado de lado 1 tem, por definição, uma unidade de área.

É muito provável que você já tenha aprendido que a área de um quadrado de lado ℓ é igual a ℓ^2 e que a área de um retângulo de base b e altura h é igual ao produto bh da base pela altura. Nesta seção pretendemos dar sentido a estas expressões, mostrando como podem ser calculadas as áreas de quadrados e retângulos em que os lados são dados por números naturais e por números racionais.

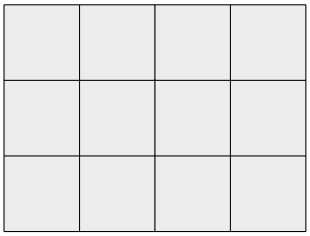
A figura a seguir mostra, respectivamente, quadrados de lado 1, lado 2 e lado 3. Por definição o quadrado de lado 1 tem uma unidade de área. Como o quadrado de lado 2 pode ser dividido em 4 quadrados de lado 1, dizemos que o quadrado de lado 2 tem área igual a 4. Do mesmo modo, como o quadrado de lado 3 pode ser dividido em 9 quadrados de lado 1, dizemos que o quadrado de lado 3 tem área igual a 9.



Generalizando, se um quadrado tem lado n, em que n é um número inteiro positivo, então sua área é igual a n^2, pois dentro deste quadrado cabem exatamente n^2 quadrados de lado 1. Observe que neste cálculo utilizamos intuitivamente as seguintes propriedades do conceito de área:

- Figuras iguais possuem a mesma área.
- Se uma figura está dividida em duas figuras disjuntas, então a soma das áreas dessas duas figuras menores é igual à área da figura total.

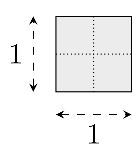
Vejamos agora como calcular a área de um retângulo cujos lados são números inteiros. Por exemplo, o retângulo $1 \times n$ deve ter área n, pois ele é formado por n quadrados unitários. O retângulo $2 \times n$ é formado por dois retângulos $1 \times n$. Assim sua área é $2n$. Procedendo desta forma, podemos chegar na expressão nm para a área do retângulo $n \times m$. Exemplificando, o retângulo 3×4 da figura a seguir tem área igual a $3 \cdot 4 = 12$, pois ele é formado por 12 quadrados unitários, ou por 3 retângulos 1×4 (três faixas horizontais).



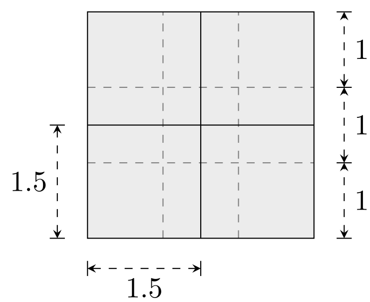
Antes de continuar vale a pena observar que a expressão n^2 para a área de um quadrado de lado n é um caso particular da expressão nm da área de um retângulo $n \times m$, pois, quando $n = m$, este retângulo também é um quadrado.

Até agora vimos que, através de uma simples contagem, é possível calcular as áreas de quadrados e retângulos cujos comprimentos dos lados são números inteiros. Mas e quando estes lados não são números inteiros, como calcular as áreas destas figuras? Bom, afirmamos que a expressão n^2 para a área de um quadrado de lado n e a expressão nm para a área de um retângulo de base n e altura m continuam válidas mesmo quando n e m não são números inteiros. Em vez de apresentar uma demonstração abstrata deste fato, vamos estudar como ele pode ser verificado em alguns exemplos.

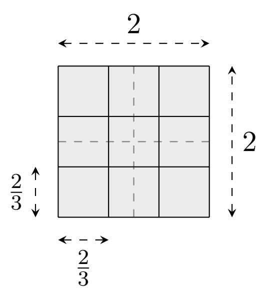
Por exemplo, na figura a seguir vemos que juntando 4 quadradinhos de lado $\frac{1}{2}$ obtemos um quadrado de lado 1 (nossa unidade de área). Isto significa que a área do quadradinho de lado $\frac{1}{2}$ é igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado de lado 1. Como o quadrado de lado 1 tem área igual a 1, concluímos que a área do quadrado de lado $\frac{1}{2}$ é igual a $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.



Vejamos, agora, como podemos determinar a área do quadrado de lado $\frac{3}{2} = 1,5$. Na figura a seguir, vemos que juntando 4 quadradinhos de lado $1,5$ obtemos um quadrado de lado 3. Isto nos diz que a área do quadrado de lado $1,5$ é igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado de lado 3. Como o quadrado de lado 3 tem área igual a $3^2 = 9$, concluímos que o quadrado de lado $1,5$ tem área igual a $\frac{1}{4} \times 9 = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$.



Como último exemplo, vejamos como determinar a área do quadrado de lado $\frac{2}{3}$. Para obter este quadrado, podemos dividir cada lado de um quadrado de lado 2 em três partes, dividindo assim o quadrado de lado 2 em 9 quadrados de lado $\frac{2}{3}$ (veja a figura a seguir). Esta divisão nos mostra que a área do quadrado de lado $\frac{2}{3}$ é igual a $\frac{1}{9}$ da área do quadrado de lado 2. Como o quadrado de lado 2 tem área igual a 4, concluímos que o quadrado de lado $\frac{2}{3}$ tem área igual a $\frac{1}{9} \times 4 = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$.



Resumindo os cálculos destes três exemplos:

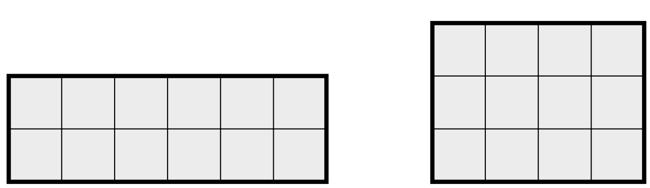
- O quadrado de lado $\frac{1}{2}$ tem área igual a $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.
- O quadrado de lado $\frac{3}{2}$ tem área igual a $\frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$.

- O quadrado de lado $\dfrac{2}{3}$ tem área igual a $\dfrac{4}{9} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$.

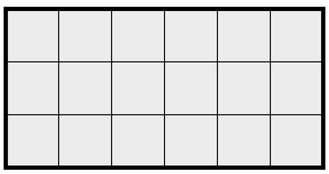
Generalizando, é possível demonstrar que a área do quadrado de lado x é igual a x^2, para qualquer que seja o número x. E para retângulos também podemos demonstrar que para quaisquer x e y, a área do retângulo de base x e altura y é igual a xy. Portanto, tanto para quadrados quanto para retângulos a área é dada pelo "*produto da base pela altura*".

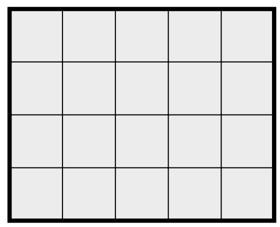
Antes de apresentar exemplos, lembre-se de que o perímetro de um quadrilátero é a soma dos comprimentos dos seus quatro lados. Deste modo, se um retângulo tem lados x e y, então o seu perímetro é igual a $2x+2y$, enquanto que a sua área é xy. Pelas próprias definições vemos que área e perímetro são grandezas de natureza diferentes e que não podem ser confundidas. A área mede a porção do plano que é ocupada pela figura e o perímetro mede o comprimento do seu contorno. Além disso, como exemplificado logo a seguir, existem retângulos de áreas iguais, mas com perímetros diferentes e, reciprocamente, existem retângulos com perímetros iguais, mas com áreas diferentes.

- A figura a seguir ilustra dois retângulos de mesma área, mas de perímetros diferentes. O retângulo 2×6 tem perímetro 16 enquanto que o retângulo 3×4 tem perímetro 14, apesar de estes dois retângulos possuírem áreas iguais a 12.



- Por outro lado, a figura a seguir ilustra dois retângulos com mesmo perímetro, mas de áreas diferentes. O retângulo 3×6 tem área 18 enquanto o retângulo 4×5 tem área 20, apesar de estes dois retângulos possuírem perímetros iguais a 18.



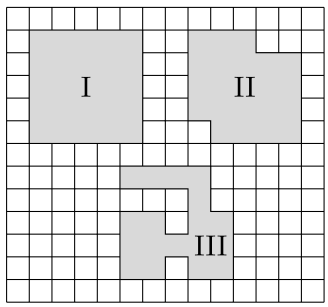


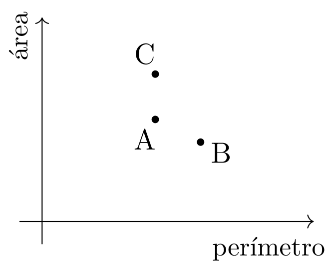
No vídeo 51 da parte de Geometria do canal PICOBMEP no YouTube pode ser encontrada uma explicação bastante detalhada para as expressões das áreas de um quadrado, de um retângulo e de um losango.

No Portal da Matemática, 9º Ano do Ensino Fundamental, módulo de Áreas de Figuras Planas, no vídeo Parte I: retângulos também pode ser encontrada uma explicação para a expressão da área de um quadrado e de um retângulo com lados inteiros, racionais e incomensuráveis.

O estudo dos próximos exemplos pode ajudar no entendimento dos conceitos de área e perímetro.

Exemplo 1: (OBMEP 2007 – N2Q15 – 1ª fase) A figura mostra três polígonos desenhados em uma folha quadriculada. Para cada um destes polígonos foi assinalado, no plano cartesiano à direita, o ponto cujas coordenadas horizontal e vertical são, respectivamente, seu perímetro e sua área.





Qual é a correspondência correta entre os polígonos e os pontos?

(a) I → C, II → B, III → A

(b) I → B, II → A, III → C

(c) I → A, II → C, III → B

(d) I → A, II → B, III → C

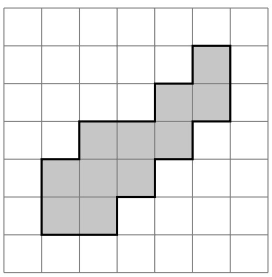
(e) I → C, II → A, III → B

Solução. Usando o lado ℓ de um dos quadradinhos do quadriculado como unidade de comprimento, a contagem direta na figura nos dá as áreas e perímetros dos polígonos, conforme a tabela abaixo.

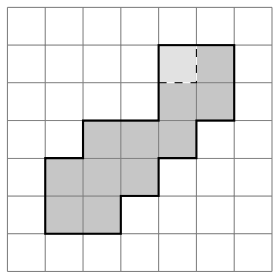
Polígono	Perímetro (em ℓ)	Área (em ℓ^2)
I	20	$5 \times 5 = 25$
II	20	$25 - 3 = 22$
III	30	$25 - 7 = 18$

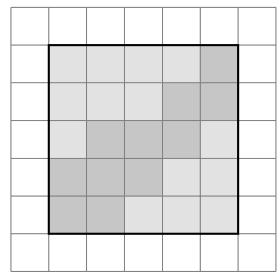
Deste modo, a correspondência que associa a cada polígono um par ordenado no plano cartesiano é I → $(20, 25)$, II → $(20, 22)$ e III → $(30, 18)$. Os pontos correspondentes a I e II têm a mesma abscissa (perímetro) logo estão na mesma reta vertical no plano cartesiano; como o ponto correspondente a I tem ordenada (área) maior, ele é o que está mais acima. Logo I → C e II → A. Resta III → B.

Exemplo 2: Qual é a área da figura a seguir, usando como unidade a área de um quadrinho? Qual é o perímetro da figura? Quantos quadrinhos podem ser acrescentados à figura de modo a obter o máximo de área sem alterar o perímetro?



Solução. Contando diretamente os segmentos que compõem o contorno da figura vemos que ela tem perímetro igual a 20. Analisando, agora, a figura a seguir à esquerda vemos que se acrescentamos um quadradinho colado na figura, aumentamos a sua área em uma unidade, mas não alteramos o seu perímetro, pois só trocamos de lugar dois segmentos (pontilhados) que já faziam parte do contorno da figura. Podemos ir acrescentando estes quadradinhos até formar um quadrado de lado 5. Portanto, podemos acrescentar mais 14 quadradinhos na figura dada sem alterar o seu perímetro, como está indicado na figura a seguir à direita.





Exemplo 3: (OBMEP 2006 – N1Q1 – 2ª fase) Miguilim brinca com dois triângulos iguais cujos lados medem 3 cm, 4 cm e 6 cm. Ele forma figuras planas unindo um lado de um triângulo com um lado do outro, sem que um triângulo fique sobre o outro. Abaixo vemos duas das figuras que ele fez.

(A) Quais os comprimentos dos lados que foram unidos nas Figuras I e II?

(B) Calcule os perímetros das Figuras I e II.

(C) Qual o menor perímetro de uma figura que Miguilim pode formar? Desenhe duas figuras que ele pode formar com este perímetro.

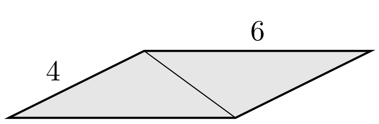


Figura I

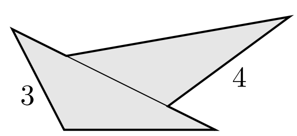


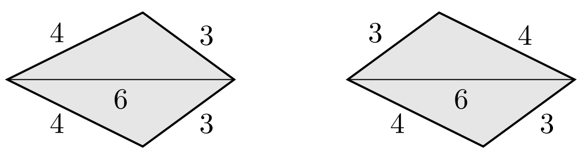
Figura II

Solução.

(A) Na Figura I, verificamos que as medidas de dois lados que não foram unidos são 4 cm e 6 cm. Como os dois lados unidos são do mesmo tamanho, eles não podem medir nem 4 cm nem 6 cm, logo medem 3 cm. Na Figura II, o triângulo que está mais acima tem um lado livre de 4 cm e claramente o lado que foi unido ao triângulo debaixo é menor do que o lado livre não identificado. Portanto, o lado do triângulo superior que foi unido ao debaixo mede 3 cm. No triângulo debaixo, claramente o maior lado foi unido ao lado do triângulo de cima. Este lado mede 6 cm.

(B) Os lados de medida 3 cm não fazem parte do perímetro da Figura I. Logo o perímetro da Figura I é igual a $2 \cdot (4 + 6) = 20$ cm. O lado de 3 cm de um triângulo e o pedaço de 3 cm do lado maior do outro triângulo não fazem parte do perímetro da Figura II. Logo, o perímetro da Figura II é igual a $6 + 4 + 3 + 4 + (6 - 3) = 20$ cm.

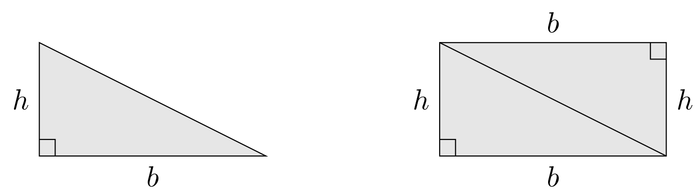
(C) O perímetro de uma figura obtida quando se unem lados dos dois triângulos é igual à soma dos perímetros dos dois triângulos menos duas vezes o comprimento do menor dos lados que foram unidos. Assim, o perímetro da figura é o menor possível quando unirmos os dois lados de 6 cm; neste caso o perímetro é igual a $2 \cdot (3 + 4 + 6) - 2 \cdot 6 = 14$ cm. As duas figuras abaixo têm perímetro mínimo.



"geometria˙diagra
2015/7/22
page 93
Estilo OBMEP

7.2 A área de um triângulo retângulo

Um triângulo retângulo de base b e de altura h é a metade de um retângulo de base b e de altura h. Como a área de um retângulo é igual ao produto da base pela altura, segue que a área de um triângulo retângulo é igual a metade da base vezes a altura, ou seja, a área do triângulo retângulo de base b e altura h é dada pela expressão $\dfrac{bh}{2}$.



7.3 A área do paralelogramo

Sabemos que um paralelogramo é um quadrilátero com pares de lados opostos paralelos e de mesmo comprimento. A distância h entre dois lados opostos de um paralelogramo é chamada de **altura** em relação a estes lados, enquanto que estes dois lados são chamados de **bases** do paralelogramo. Quando um segmento h perpendicular a uma base do paralelogramo intersecta a base oposta, a sequência de figuras a seguir ilustra como, nestes casos, um paralelogramo de base b e altura h pode ser transformado, sem alterar a sua área, em um retângulo também de base b e altura h. Como a área do retângulo é bh, vemos que a área do paralelogramo também é dada por esta expressão.

Figura 1

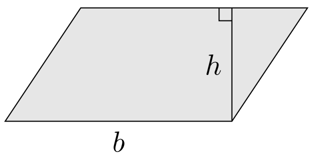


Figura 2

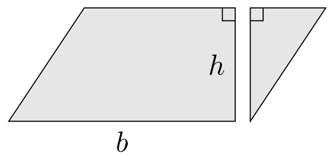


Figura 3

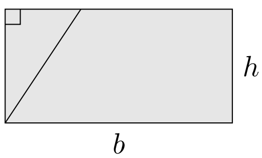
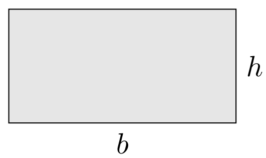
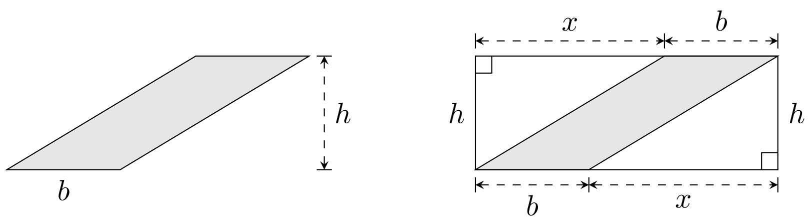


Figura 4



Agora, de modo geral, considere um paralelogramo qualquer de base b e de altura h. Adicionando ao paralelogramo dois triângulos retângulos iguais, como indicado na figura a seguir, formamos um retângulo de base $b + x$ e de altura h.



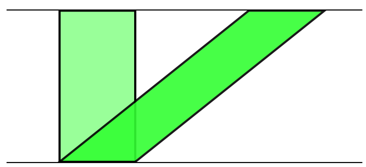
Portanto, para obter a área do paralelogramo, podemos subtrair da área do retângulo de base $b + x$ e altura h as áreas dos dois triângulos retângulos de base x e altura h. Logo a área do paralelogramo é dada por

$$(b + x)h - \frac{xh}{2} - \frac{xh}{2} = bh + xh - \frac{xh}{2} - \frac{xh}{2} = bh.$$

Assim, para quaisquer paralelogramos e retângulos, suas áreas são calculadas pela mesma expressão “*base vezes altura*”.

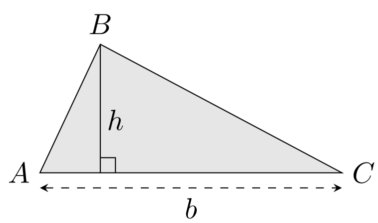
"geometria˙diagra
2015/7/22
page 95
Estilo OBMEP

Como a área de um paralelogramo é o produto da base vezes a altura, todos os paralelogramos de mesma base e mesma altura possuem áreas iguais. A figura a seguir ilustra, então, um retângulo e um paralelogramo com áreas iguais.

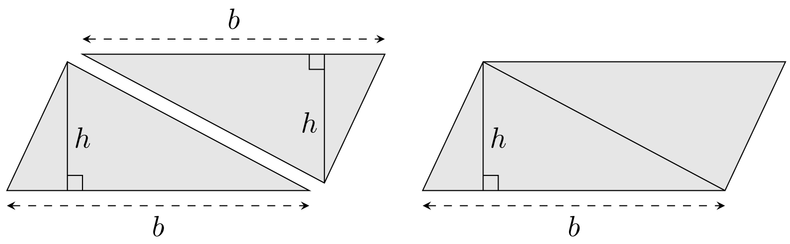


7.4 A área de um triângulo qualquer

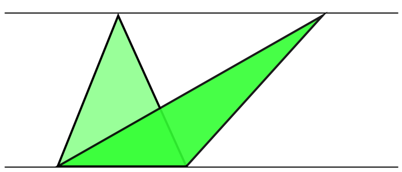
Considere um triângulo qualquer ABC. Seja b o comprimento do seu lado AC. A **altura** do triângulo em relação a **base** AC é o segmento que passa pelo vértice B e é perpendicular a reta $\overleftrightarrow{AC}$. Seja h o comprimento desta altura.



Nas figuras a seguir vemos que com duas cópias de um triângulo de base b e altura h podemos montar um paralelogramo de base b e altura h (veja o exercício 1 da seção 6.2). Assim o paralelogramo tem o dobro da área do triângulo. Como a área do paralelogramo é "base vezes altura", a área do triângulo deve ser "base vezes altura dividido por dois", uma vez que o triângulo tem metade da área do paralelogramo. Deste modo, a área do triângulo de base b e altura h é $\dfrac{b \cdot h}{2}$.

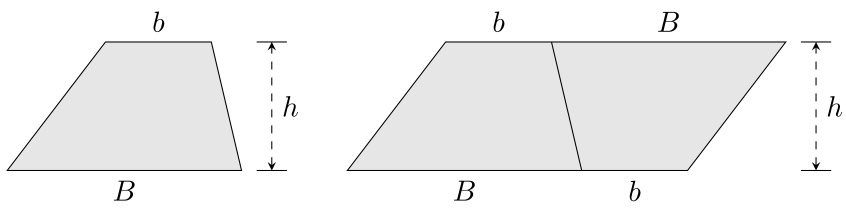


Da expressão da área de um triângulo segue que se dois triângulos possuem a mesma base e a mesma altura, então eles possuem a mesma área. Na figura a seguir, se as retas são paralelas, vemos triângulos diferentes, mas com áreas iguais.



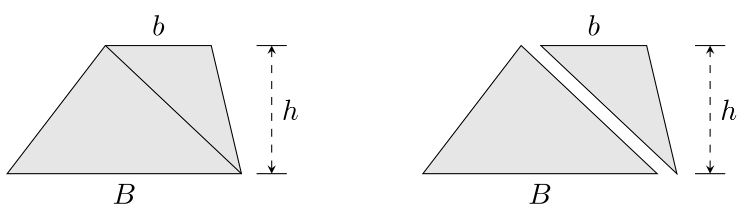
7.5 A área do trapézio

Considere um trapézio de lados paralelos de comprimentos b e B. Estes lados são chamados de **bases** do trapézio e um segmento perpendicular a estas bases é chamado de **altura** do trapézio. Seguindo os esquemas abaixo, vemos que com duas cópias do trapézio de bases b e B e de altura h pode-se construir um paralelogramo de base $b + B$ e de atura h. Por isto, a área do trapézio de bases b e B e altura h é a metade da área do paralelogramo de base $b + B$ e altura h. Logo a área deste trapézio é dada por $\dfrac{(b+B)h}{2}$.



De outro modo, a área de um trapézio de bases b e B e de altura h também pode ser calculada da seguinte maneira. Traçando uma diagonal do trapézio, como está indicado na figura a seguir, vemos que é possível dividir o trapézio em dois triângulos: um de base b e de altura h e o outro de base B e de altura h. Somando as áreas destes triângulos obtemos a área do trapézio:

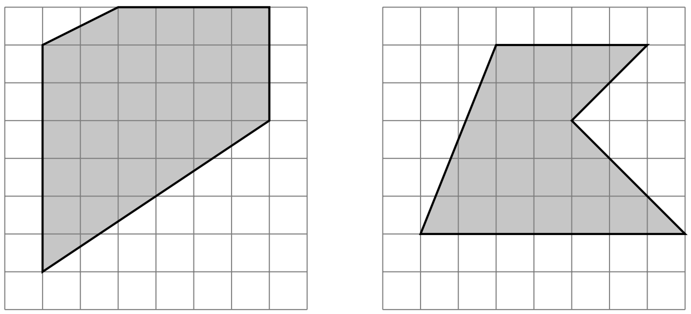
$$\frac{bh}{2}+\frac{Bh}{2}=\frac{(b+B)h}{2}$$



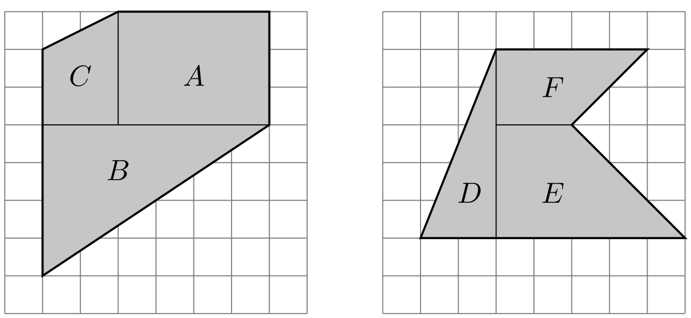
7.6 Exemplos resolvidos

Nesta seção vamos utilizar os conceitos introduzidos nas seções anteriores para resolver alguns problemas de cálculo de áreas e perímetros. Esperamos que estes exemplos, e a maneira como as soluções estão redigidas, ajudem os alunos a resolverem e a escreverem as soluções dos exercícios apresentados nas próximas seções.

Exemplo 1: Decompondo em figuras geométricas mais simples, calcule a área de cada uma das seguintes figuras desenhadas em uma malha de quadrados de lado 1.



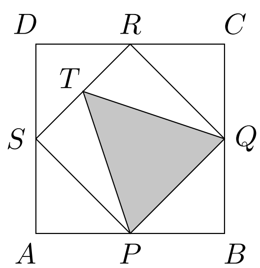
Solução. Na figura a seguir, apresentamos uma possível decomposição das figuras dadas em triângulos, retângulos e trapézios.



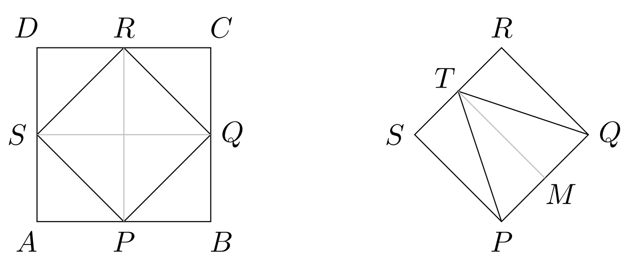
A figura da esquerda está decomposta em um retângulo A de lados 3 e 4; um triângulo retângulo B de catetos 6 e 4 e um trapézio C de bases 2 e 3 e de altura 2. Portanto, as áreas são: $área(A) = 3 \cdot 4 = 12$, $área(B) = \dfrac{6 \cdot 4}{2} = 12$ e $área(C) = \dfrac{(2+3)2}{2} = 5$. Deste modo, a área da figura da esquerda é $12 + 12 + 5 = 29$.

A figura da direita está decomposta em um triângulo retângulo D de catetos 2 e 5; um trapézio E de bases 2 e 5 e de altura 3; e um trapézio F de bases 2 e 4 e de altura 2. As áreas destas figuras são: $área(D) = \dfrac{2 \cdot 5}{2} = 5$, $área(E) = \dfrac{(2+5)3}{2} = 10,5$ e $área(F) = \dfrac{(2+4)2}{2} = 6$. Portanto, a área da figura da direita é igual a $5 + 10,5 + 6 = 21,5$.

Exemplo 2: (OBMEP 2009 – N1Q10 – 1ª fase) Na figura, o quadrado $ABCD$ tem área 40 cm^2. Os pontos P, Q, R e S são pontos médios dos lados do quadrado e T é o ponto médio do segmento RS. Qual é a área do triângulo PQT?

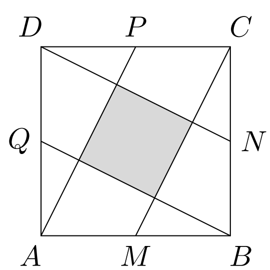


Solução. Traçando os segmentos QS e PR, vemos que o quadrado $ABCD$ é composto de oito triângulos retângulos iguais e que o quadrado $PQRS$ é formado por quatro destes triângulos. Portanto, a área do quadrado $PQRS$ é metade da área do quadrado $ABCD$, ou seja, $\dfrac{40}{2} = 20$ cm^2.

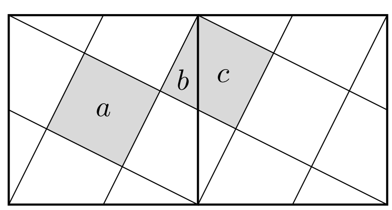


Traçando agora o segmento TM, sendo M o ponto médio de PQ, vemos que o quadrado $PQRS$ é composto de quatro triângulos retângulos iguais e o triângulo PQT é formado por dois destes triângulos. Logo, a área do triângulo PQT é metade da área do quadrado $PQRS$, ou seja, $\dfrac{20}{2} = 10$ cm^2.

Exemplo 3: Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado de lado 10 e M, N, P e Q são pontos médios dos lados deste quadrado. Qual é a área do quadrado sombreado?

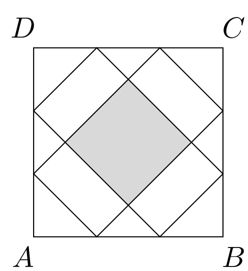


Solução. O quadrado $ABCD$ está dividido em um quadrado a, quatro triângulos retângulos b e quatro trapézios c. Reproduzindo a figura dada ao lado dela mesma, pode-se concluir que um triângulo retângulo b e um trapézio c formam juntos um quadrado a. Isto é, $a = b + c$.

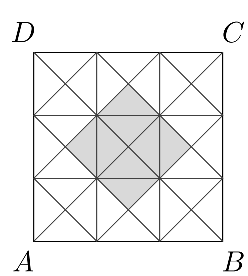


Assim vemos que o quadrado $ABCD$ está dividido em regiões que podem ser reorganizadas para formarem 5 quadrados a. Portanto, a área do quadrado a é igual a um quinto da área do quadrado $ABCD$ e, portanto, a área do quadrado a é igual a $\dfrac{10 \times 10}{5} = 20$.

Exemplo 4: Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado de lado 18. Sobre cada um dos seus lados estão marcados dois pontos que dividem o lado do quadrado em 3 partes iguais. Traçando alguns segmentos que unem estes pontos, foi obtida a seguinte figura. Qual é a área do quadrado sombreado?



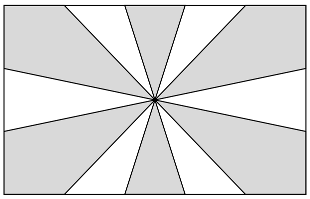
Solução. Desenhando vários segmentos de reta como está indicado na figura a seguir, podemos dividir o quadrado $ABCD$ em 36 triângulos iguais.



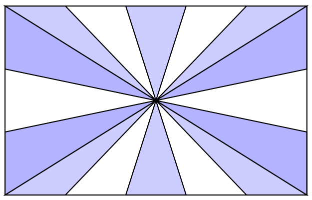
A área de cada um destes triângulos é igual a área do quadrado $ABCD$ dividida por 36, ou seja, $\dfrac{18 \times 18}{36} = 9$. Como o quadrado sombreado é formado por 8 destes triângulos, a sua área é igual a $8 \times 9 = 72$.

“geometria˙diagra
2015/7/22
page 102
Estilo OBMEP

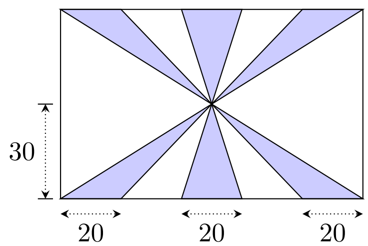
Exemplo 5: (Banco de Questões 2011, Nível 1, questão 11, página 15) O Tio Mané é torcedor doente do Coco da Selva Futebol Clube e resolveu fazer uma bandeira para apoiar seu time no jogo contra o Desportivo Quixajuba. Para isto, comprou um tecido branco retangular com 100 cm de largura e 60 cm de altura. Dividiu dois de seus lados em cinco partes iguais e os outros dois em três partes iguais, marcou o centro do retângulo e pintou o tecido da forma indicada na figura. Qual é a área do tecido que Tio Mané pintou?

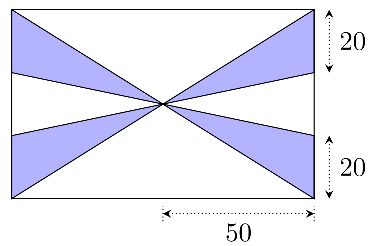


Solução. As diagonais do retângulo dividem as regiões pintadas do tecido em dois tipos de triângulos.



Todos os seis triângulos da figura seguinte, à esquerda, possuem base de 20 cm e altura de 30 cm. Portanto, eles possuem mesma área igual a $\dfrac{20 \cdot 30}{2} = 300\ \text{cm}^2$. Todos os quatro triângulos da figura seguinte, à direita, possuem a mesma área, pois eles têm base de 20 cm e altura de 50 cm. Logo cada um deles tem área igual a $\dfrac{20 \cdot 50}{2} = 500\ \text{cm}^2$.





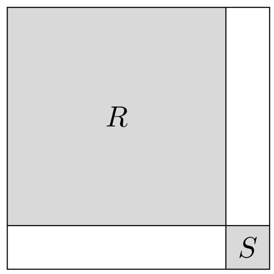
Portanto, a área total pintada no tecido é igual a $6 \cdot 300 + 4 \cdot 500 = 3800\ \text{cm}^2$.

Exemplo 6: (OBMEP 2010 – N1Q3 – 2ª fase) A Professora Clotilde desenhou três figuras no quadro negro, todas com área igual a $108\ \text{cm}^2$.

(A) A primeira figura é um retângulo que tem um lado de comprimento igual a 12 cm. Qual é o perímetro deste retângulo?

(B) A segunda figura é um retângulo dividido em um retângulo branco e um quadrado cinzento de área igual a $36\ \text{cm}^2$, como na figura. Qual é o perímetro do retângulo branco?

(C) A terceira figura é um quadrado, que ela dividiu em dois retângulos brancos e dois quadrados cinzentos R e S, como na figura. O perímetro de um dos retângulos é três vezes o perímetro do quadrado S. Qual é a área do quadrado R?



Solução.

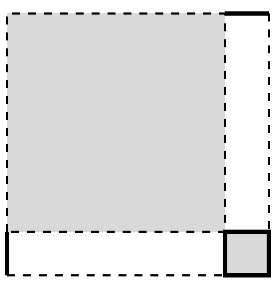
(A) Primeiramente vamos lembrar que a área de um retângulo pode ser calculada como o produto dos comprimentos de dois lados adjacentes. No problema, como a área do retângulo é 108 cm^2 e um lado mede 12 cm, o comprimento do lado adjacente, deve ser um número que multiplicado por 12 tenha como resultado 108, ou seja, é $108 \div 12 = 9$. Assim, o perímetro do retângulo é $12 + 12 + 9 + 9 = 42$ cm.

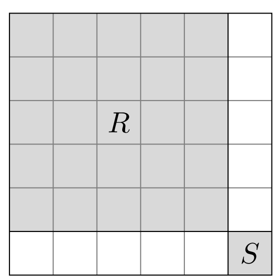
(B) Como o quadrado cinza tem área igual a 36 cm^2, o comprimento de seu lado é um número cujo quadrado é 36, ou seja, é igual 6 cm. Logo o retângulo maior tem um lado de comprimento 6 cm; como sua área é 108 cm^2, segue que seu outro lado mede $108 \div 6 = 18$ cm. Logo um lado do retângulo branco mede 6 cm e o outro mede $18 - 6 = 12$ cm, e assim seu perímetro é $12 + 12 + 6 + 6 = 36$ cm.

Pode-se também argumentar que a área do retângulo branco é $108 - 36 = 72$ cm^2. Como um de seus lados mede 6 cm, o outro mede então $72 \div 6 = 12$ cm; o restante da solução segue como acima.

(C) Na figura a seguir, marcamos os lados do quadrado R em pontilhado e os lados do quadrado S em traço mais grosso. Para simplificar, vamos nos referir ao comprimento de um segmento grosso apenas como "grosso", e do mesmo modo para "pontilhado". O perímetro do quadrado S é igual a quatro grossos. Observamos que os retângulos brancos são iguais, pois têm os mesmos lados, e seu perímetro é igual a dois grossos mais dois pontilhados. Por outro lado, o enunciado diz que o perímetro de um destes retângulos é igual a três vezes o perímetro de S, isto é, igual a doze grossos. Logo, os dois pontilhados devem ser iguais a dez grossos, ou seja, cada pontilhado é igual a cinco grossos.

Notamos agora que um lado do quadrado grande é igual a um grosso mais um pontilhado, ou seja, é igual a seis grossos. Podemos então decompor o quadrado grande em $6 \times 6 = 36$ quadradinhos iguais ao quadrado S, como na figura a seguir. Como a área do quadrado maior é igual a 108 cm^2, a área de um destes quadradinhos é igual a $108 \div 36 = 3$ cm^2. Finalmente, o quadrado R consiste de $5 \times 5 = 25$ quadradinhos e então sua área é igual a $25 \times 3 = 75$ cm^2.





7.7 Questões da OBMEP no Portal da Matemática

No Portal da Matemática, na área reservada para o 9º Ano do Ensino Fundamental, no módulo "Áreas de Figuras Planas", nos quatro últimos vídeos são resolvidas onze questões de provas da OBMEP:

Questões resolvidas na PARTE 1:

- OBMEP 2013 – N2Q4 – 1ª fase
- OBMEP 2013 – N2Q7 – 1ª fase

Questões resolvidas na PARTE 2:

- OBMEP 2013 – N2Q9 – 1ª fase
- OBMEP 2012 – N1Q12 – 1ª fase
- OBMEP 2012 – N2Q8 – 1ª fase

Questões resolvidas na PARTE 3:

- OBMEP 2012 – N2Q15 – 1ª fase
- OBMEP 2011 – N2Q4 – 1ª fase
- OBMEP 2011 – N2Q10 – 1ª fase

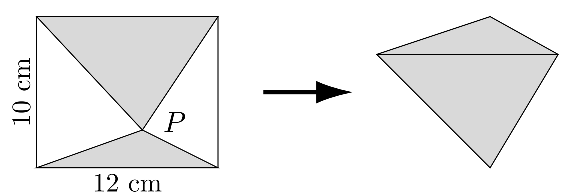
Questões resolvidas na PARTE 4:

- OBMEP 2010 – N2Q6 – 1ª fase
- OBMEP 2010 – N2Q8 – 1ª fase
- OBMEP 2010 – N2Q13 – 1ª fase

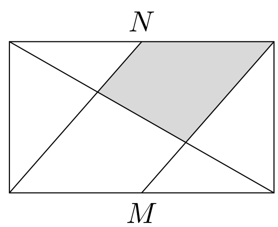
No que segue apresentamos os enunciados destas onze questões. Recomendamos que você tente resolver estas questões sozinho e, somente depois de pensar bastante e de obter uma resposta parcial ou completa, estude as soluções apresentadas nos vídeos. Deste modo, como na seção anterior, as questões a seguir podem ser vistas como mais uma lista de exercícios resolvidos. Só que, em vez das soluções estarem aqui na apostila, as soluções estão disponíveis no Portal da Matemática. Bons estudos! E lembre-se: se você tiver dúvidas, procure o seu Professor Orientador ou o seu Moderador no Fórum Hotel de Hilbert.

Exercícios:

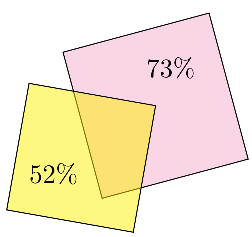
1. **(OBMEP 2013 – N2Q4 – 1ª fase)** Juliana desenhou, em uma folha de papel, um retângulo de comprimento 12 cm e largura 10 cm. Ela escolheu um ponto P no interior do retângulo e recortou os triângulos sombreados como na figura. Com estes triângulos, ela montou o quadrilátero da direita. Qual é a área do quadrilátero?



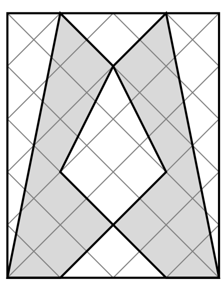
2. **(OBMEP 2013 – N2Q7 – 1ª fase)** A figura representa um retângulo de 120 m^2 de área. Os pontos M e N são os pontos médios dos lados a que pertencem. Qual é a área da região sombreada?



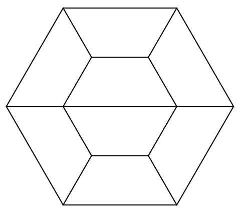
3. **(OBMEP 2013 – N2Q9 – 1ª fase)** Dois quadrados de papel se sobrepõem como na figura. A região não sobreposta do quadrado menor corresponde a 52% de sua área e a região não sobreposta do quadrado maior corresponde a 73% de sua área. Qual é a razão entre o lado do quadrado menor e o lado do quadrado maior?



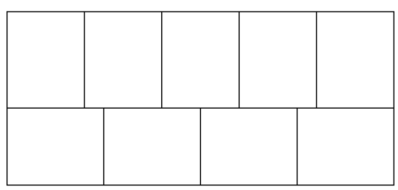
4. **(OBMEP 2012 – N1Q12 – 1ª fase)** O retângulo da figura, que foi recortado de uma folha de papel quadriculado, mede 4 cm de largura por 5 cm de altura. Qual é a área da região sombreada de cinza?



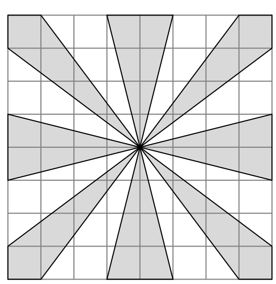
5. **(OBMEP 2012 – N2Q8 – 1ª fase)** A figura foi formada por oito trapézios isósceles idênticos, cuja base maior mede 10 cm. Qual é a medida, em centímetros, da base menor de cada um destes trapézios?



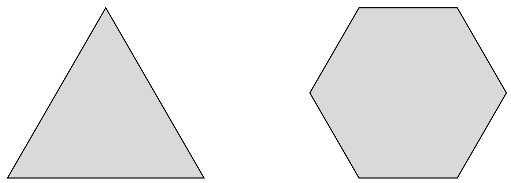
6. **(OBMEP 2012 – N2Q15 – 1ª fase)** A figura mostra um retângulo de área 720 cm^2, formado por nove retângulos menores e iguais. Qual é o perímetro, em centímetros, de um dos retângulos menores?



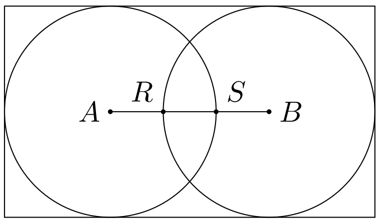
7. **(OBMEP 2011 – N2Q4 – 1ª fase)** Na figura, os lados do quadrado foram divididos em oito partes iguais. Qual é a razão entre a área cinza e a área deste quadrado?



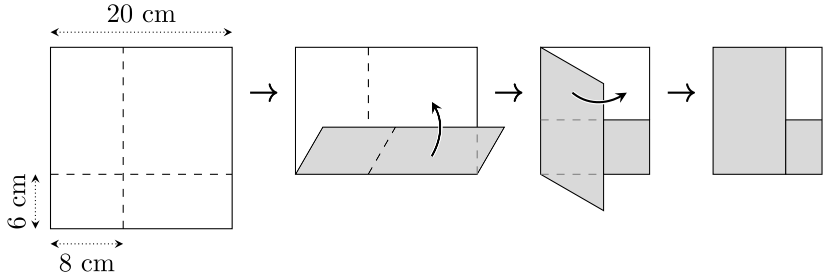
8. **(OBMEP 2011 – N2Q10 – 1ª fase)** Um triângulo equilátero e um hexágono regular têm o mesmo perímetro. A área do hexágono é 6 m^2. Qual é a área do triângulo?



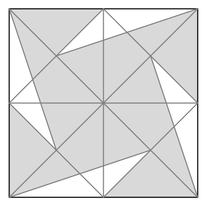
9. **(OBMEP 2010 – N2Q6 – 1ª fase)** Na figura as circunferências de centros A e B são tangentes aos lados do retângulo e têm diâmetros iguais a 4 cm. A distância entre os pontos R e S é 1 cm. Qual é o perímetro do retângulo?



10. **(OBMEP 2010 – N2Q8 – 1ª fase)** Um quadrado de papel de 20 cm de lado, com a frente branca e o verso cinza, foi dobrado ao longo das linhas pontilhadas, como na figura. Qual é a área da parte branca que ficou visível?



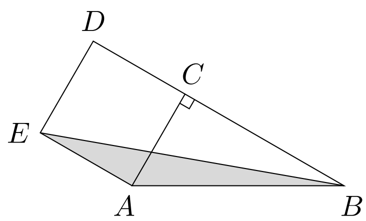
11. **(OBMEP 2010 – N2Q13 – 1ª fase)** A figura mostra um quadrado com suas diagonais e segmentos que unem os pontos médios de seus lados. A área sombreada corresponde a que fração da área do quadrado?



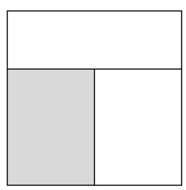
7.8 Exercícios de revisão

Nesta seção apresentamos uma pequena lista de exercícios sobre os assuntos explorados neste encontro. Após participar da aula presencial e das atividades do Fórum, você pode utilizar estas questões para fazer uma autoavaliação do seu aprendizado. Reserve um tempo para resolver estas questões sozinho, com calma e sem consulta, como em uma prova. Após se dedicar para resolver estas questões, consulte a apostila ou o seu caderno, converse com o seu Professor Orientador e tire suas dúvidas no Fórum Hotel de Hilbert para ver como foi o seu desempenho nesta pequena atividade. Ela poderá ajudar a identificar o que você já aprendeu com clareza e também poderá mostrar aquela parte da teoria que você ainda precisa se dedicar mais. Esperamos que todos vocês gostem e aproveitem este desafio. Bons estudos!

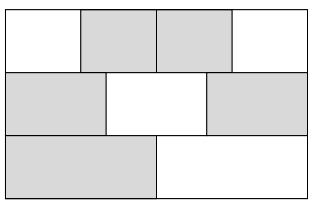
1. Na figura a seguir, $ACDE$ é um quadrado com 14 cm^2 de área. Qual é a área do triângulo ABE?



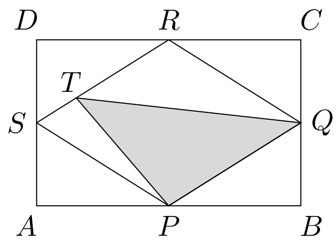
2. **(OBMEP 2009 – N1Q17 – 1ª fase)** A figura mostra um quadrado de lado 12 cm, dividido em três retângulos de mesma área. Qual é o perímetro do retângulo sombreado?



3. **(OBMEP 2013 – N1Q6 – 1ª fase)** A figura representa um retângulo de área 36 m^2, dividido em três faixas de mesma largura. Cada uma das faixas está dividida em partes iguais: uma em quatro partes, outra em três e a terceira em duas. Qual é a área total das partes sombreadas?



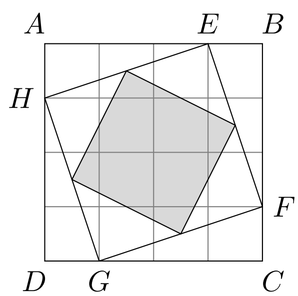
4. **(OBMEP 2009 – N2Q12 – 1ª fase)** Na figura o retângulo $ABCD$ tem área 40 cm^2. Os pontos P, Q, R e S são pontos médios dos lados do retângulo e T está no segmento RS. Qual é a área do triângulo PQT?



5. **(OBMEP 2005 – N2Q4 – 2ª fase)** O quadrado $ABCD$ da figura está dividido em 16 quadradinhos iguais. O quadrado sombreado tem os vértices sobre os pontos médios do quadrado $EFGH$.

   (A) A área do quadrado $EFGH$ corresponde a que fração da área do quadrado $ABCD$?

   (B) Se o quadrado $ABCD$ tem 80 cm^2 de área, qual é o lado do quadrado sombreado?

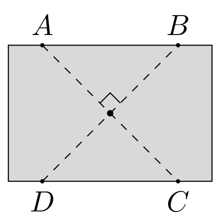


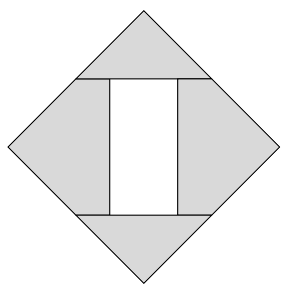
6. **(OBMEP 2006 – N1Q4 – 2ª fase)** Uma folha retangular de 20 cm por 30 cm foi cortada ao longo das linhas tracejadas AC e BD em quatro pedaços: dois triângulos iguais e dois polígonos iguais de cinco lados cada um, como na Figura I. Os segmentos AC e BD têm o mesmo comprimento e se encontram no centro do retângulo formando ângulos retos.

   (A) Qual é o comprimento do segmento AB?

   (B) Qual é a área de um pedaço triangular? E de um pedaço de cinco lados?

   (C) Com os quatro pedaços podemos montar um quadrado com um buraco retangular, como na Figura II. Qual é a área do buraco?

I



II

ENCONTRO 8

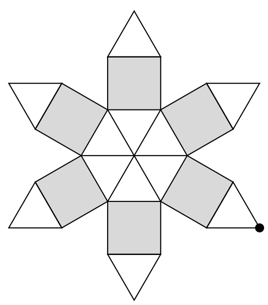
No Encontro 7 estudamos os conceitos de área e perímetro, vimos como calcular áreas e perímetros de figuras geométricas simples e aplicamos o estudo realizado na resolução de alguns exercícios. Como existe uma variedade enorme de questões sobre o cálculo de áreas e perímetros e como um único encontro presencial é pouco para aprender profundamente conceitos tão importantes, neste Encontro 8 vamos retomar os estudos iniciados no Encontro 7 por meio da discussão de questões variadas de provas da OBMEP, provas da OBM e dos Bancos de Questões. Estude estas questões resolvidas e, no caso de dúvidas, procure o seu Professor Orientador ou o seu Moderador no Fórum Hotel de Hilbert.

Em seguida, após reforçar o estudo de áreas e perímetros, vamos aproveitar o contexto do cálculo de áreas para apresentar e demonstrar o Teorema de Pitágoras. Além disso, vamos aplicar o Teorema de Pitágoras na solução de vários problemas.

Finalmente, encerraremos este módulo de Geometria com a discussão de alguns problemas que envolvem a análise e a interpretação de figuras tridimensionais, pois também temos como objetivo que os alunos do PIC tenham a habilidade de interpretar, representar e de resolver problemas de figuras espaciais. Bons estudos!

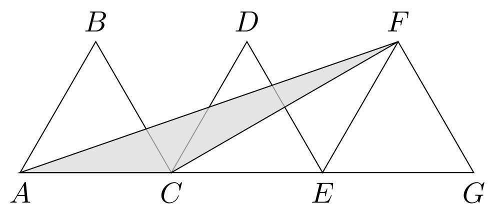
8.1 Exemplos variados: áreas e perímetros

1. (Banco de Questões 2011, Nível 1, questão 12, página 15) As flores de Geometrix têm formatos muito interessantes. Algumas delas possuem a forma mostrada na figura, na qual há seis quadrados e doze triângulos equiláteros. Uma abelha pousou no ponto destacado e andou sobre a borda da flor no sentido horário até voltar ao ponto inicial. Sabendo que a região cinza tem 24 cm^2 de área, qual é a distância percorrida pela abelha?



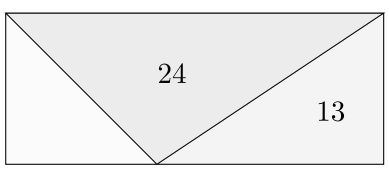
Solução. Como a região cinza é formada por seis quadrados, a área de cada um destes quadrados é igual a $24 \div 6 = 4$ cm^2. Como a área de um quadrado de lado ℓ é dada por ℓ^2, vemos que cada um dos quadrados da figura tem 2 cm de lado. Por uma contagem direta vemos que uma volta completa na borda da flor contém $6 \cdot 4 = 24$ segmentos. Logo, para dar uma volta completa na flor, a abelha percorreu uma distância igual a $24 \cdot 2 = 48$ cm.

2. Na figura a seguir, ABC, CDE e EFG são triângulos equiláteros de área de 60 cm^2 cada. Se os pontos A, C, E e G são colineares, determine a área do triângulo AFC.

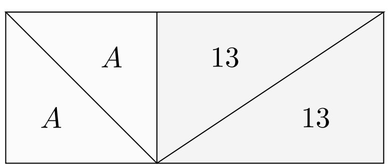


Solução. O triângulo AFC possui a mesma base e a mesma altura que os triângulos ABC, CDE e EFG. Portanto, todos estes quatro triângulos possuem a mesma área de 60 cm^2.

3. Dois segmentos dividem o retângulo da figura a seguir em três triângulos. Um deles tem área 24 e outro tem área 13. Determine a área do terceiro triângulo.

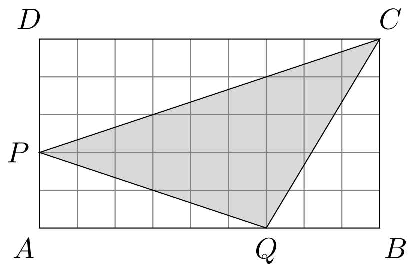


Solução. Observe a figura a seguir.



Como a diagonal de um retângulo o divide em dois triângulos de mesma área, vemos que o triângulo de área 24 tem como área a soma das áreas do triângulo de área 13 e do triângulo de área desconhecida. Se este triângulo tem área igual a A, então concluímos que $A + 13 = 24$ e, portanto, $A = 24 - 13 = 11$.

4. Na figura a seguir, $ABCD$ é um retângulo de base 9 e de altura 5. Determine a área do triângulo CPQ.

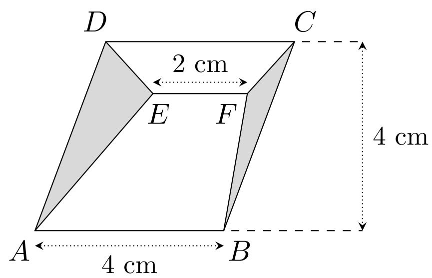


Solução. Em algumas situações, para o cálculo de uma área, é mais fácil considerar uma região maior e subtrair dela pedaços que não fazem parte da região que se pretende calcular a área. No caso deste problema, para calcular a área do triângulo CPQ podemos subtrair da área do retângulo $ABCD$ as áreas dos triângulos brancos CDP, PAQ e QBC. Como

- área$(ABCD) = 9 \cdot 5 = 45$
- área$(CDP) = \dfrac{9 \cdot 3}{2} = 13,5$
- área$(PAQ) = \dfrac{6 \cdot 2}{2} = 6$
- área$(QBC) = \dfrac{3 \cdot 5}{2} = 7,5$

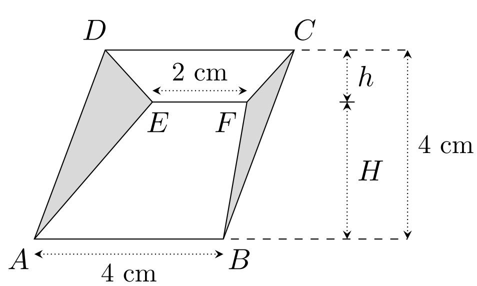
temos que área$(CPQ) \;=\; 45 - 13,5 - 6 - 7,5 \;=\; 18.$

5. **(OBMEP 2009 – N2Q18 – 1ª fase)** Na figura, $ABCD$ é um paralelogramo e o segmento EF é paralelo a AB. Qual é a soma das áreas dos triângulos sombreados?



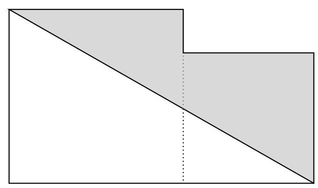
Solução. Como no problema anterior, vamos subtrair de uma área maior, áreas de regiões que não fazem parte da figura que pretendemos calcular a área. Aqui vamos subtrair da área do paralelogramo $ABCD$ as áreas dos trapézios brancos $ABFE$ e $CDEF$.

- O paralelogramo $ABCD$ tem base 4 cm e tem altura 4 cm. Logo sua área é igual a $4 \cdot 4 = 16$ cm^2.
- O trapézio $ABFE$ tem base maior 4 cm, tem base menor 2 cm e tem uma altura H. A área deste trapézio é $\dfrac{(2+4)H}{2} = 3H$.
- O trapézio $CDEF$ tem base maior 4 cm, tem base menor 2 cm e tem uma altura h. A área deste trapézio é $\dfrac{(2+4)h}{2} = 3h$.

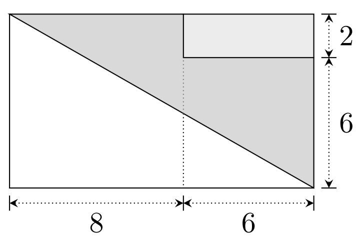


Daí a soma das áreas dos triângulos sombreados é igual a $16 - 3H - 3h = 16 - 3(H + h)$. Observe agora que a soma das alturas $H + h$ dos trapézios é igual a altura 4 do paralelogramo. Logo, $H + h = 4$ e, portanto, a soma das áreas dos triângulos sombreados é igual a $16 - 3(H + h) = 16 - 3 \cdot 4 = 16 - 12 = 4$ cm^2.

6. **(OBMEP 2014 – N1Q7 – 1ª fase)** A figura é formada por dois quadrados, um de lado 8 cm e outro de lado 6 cm. Qual é a área da região cinza?



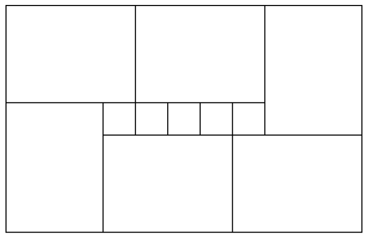
Solução. Se juntarmos à região cinza o retângulo cujos lados medem 6 cm e 2 cm, como na figura a seguir, teremos um novo retângulo com lados medindo 14 cm e 8 cm cuja área é $14 \cdot 8 = 112$ cm^2.



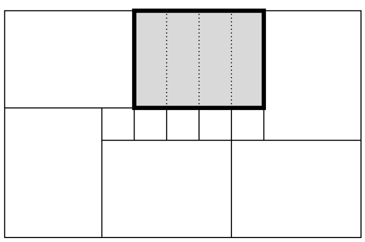
A área desejada é igual à diferença entre a área da metade desse último retângulo e a área do retângulo 2×6 que foi acrescentado, isto é, $\dfrac{112}{2} - 6 \cdot 2 = 56 - 12 = 44$ cm^2.

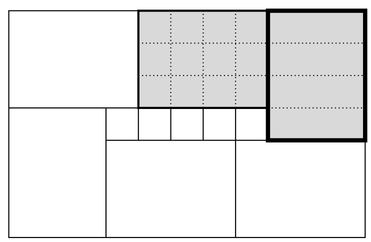
7. (Banco de Questões 2011, Nível 1, questão 19) A partir de seis retângulos iguais e cinco quadrados iguais é formado um retângulo

de perímetro 324 cm, como mostrado na figura. Determine a área do retângulo construído.

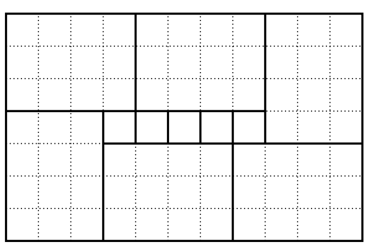


Primeira Solução. Do retângulo cinza destacado a esquerda, concluímos que um dos lados do retângulo mede 4 vezes o lado do quadrado. Assim, como ilustrado na figura da direita, o outro lado do retângulo mede 3 vezes o lado do quadrado.



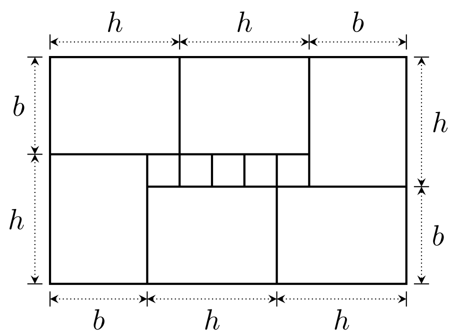


Segue daí que podemos dividir o retângulo em $11 \times 7 = 77$ quadrados, como indicado na figura a seguir.

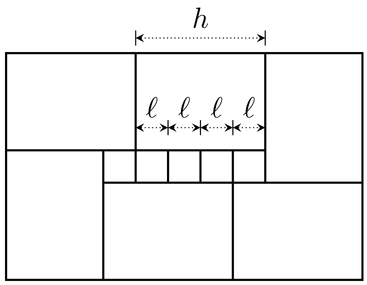


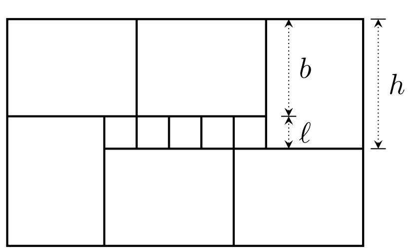
O perímetro deste retângulo é $11 + 11 + 7 + 7 = 36$ vezes o lado do quadrado. Portanto, o lado do quadrado é $324 \div 36 = 9$ cm e a área do retângulo é $11 \times 7 \times 9^2 = 6237$ cm^2.

Segunda Solução. Também podemos resolver esta questão de uma maneira um pouco mais algébrica. Vejamos. Seja b a base e seja h a altura de um dos seis retângulos que formam o retângulo do contorno da figura dada, e seja ℓ o lado de um dos cinco quadradinhos. Como está indicado na figura a seguir, o perímetro do retângulo é formado por seis segmentos h e por quatro segmentos b. Daí obtemos a relação $6h + 4b = 324$.



Agora, na figura a seguir, na esquerda vemos que $h = 4\ell$ e na direita vemos que $b + \ell = h$.





Resumindo, obtemos o seguinte sistema de equações:

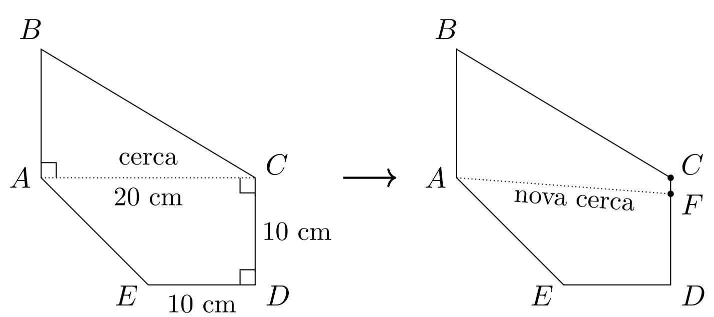
$$\begin{cases} 6h + 4b &= 324 \\ h &= 4\ell \\ b + \ell &= h \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtemos $b = 27$ cm, $h = 36$ cm e $\ell = 9$ cm. Daí a área do retângulo do contorno da figura dada tem base $b + 2h = 99$ cm e tem altura $b + h = 63$ cm. Sua área é, então, igual a $99 \cdot 63 = 6237$ cm^2.

8. **(OBMEP 2008 – N1Q2 – 2ª fase)** A figura da esquerda representa o terreno de Dona Idalina. Este terreno é dividido em duas partes por uma cerca, representada pelo segmento AC. A parte triangular ABC tem área igual a 120 m^2.

   (A) Qual é a área total do terreno?

   (B) Dona Idalina quer fazer uma nova cerca, representada pelo segmento AF na figura da direita, de modo a dividir o terreno em duas partes de mesma área. Qual deve ser a distância CF?



Solução.

(A) O terreno de Dona Idalina é formado por um triângulo ABC e por um trapézio $ACDE$. O triângulo ABC tem área igual a 120 m^2. O trapézio $ACDE$ tem base maior $\overline{AC} = 20$ m, tem base menor $\overline{DE} = 10$ m e tem altura $\overline{CD} = 10$ m. Logo a área deste trapézio é igual a $\dfrac{(20+10)10}{2} = 150$ m^2. Daí a área total do terreno é igual a

$$\text{área}(ABC) + \text{área}(ACDE) = 120 + 150 = 270 \text{ m}^2.$$

(B) Como o terreno tem 270 m^2, ao dividi-lo em duas partes $ABCF$ e $AFDE$ de áreas iguais, cada uma destas partes deve ter área igual a $\dfrac{270}{2} = 135$ m^2. Note que $ABCF$ é um trapézio de base maior $\overline{AB} = 12$ m, base menor $\overline{CF}$ e altura $\overline{AC} = 20$ m. Calculando a área deste trapézio pela fórmula usual e a igualando a 135 m^2, obtemos

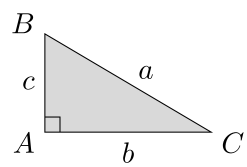
$$\frac{(12+\overline{CF})20}{2} = 135.$$

Resolvendo esta equação obtemos $\overline{CF} = 1,5$ m.

8.2 Teorema de Pitágoras

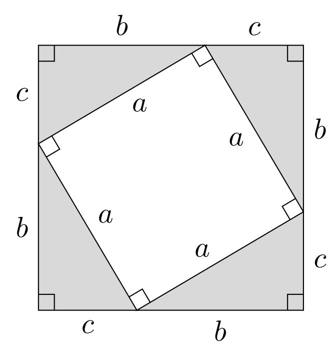
O objetivo desta seção é apresentar e demonstrar o Teorema de Pitágoras e, em seguida, utilizar este teorema na solução de problemas. Antes de começar com esta parte mais matemática, vale a pena observar que na Apostila 3 do PIC da OBMEP você pode estudar ainda mais sobre este importante teorema. Lá você pode ler sobre fatos históricos, a recíproca do Teorema de Pitágoras, triplas de números Pitagóricos, etc. A todos os alunos interessados deixamos como sugestão o estudo do primeiro capítulo daquela apostila.

Considere um triângulo retângulo ABC com ângulo reto no vértice A. Vamos escrever os comprimentos dos lados deste triângulo como $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$. Lembre-se de que os lados de um triângulo retângulo recebem nomes: os **catetos** são os lados AC e AB que chegam no vértice do ângulo reto e a **hipotenusa** é o lado BC que não passa pelo vértice do ângulo reto.



Teorema de Pitágoras: *Se um triângulo retângulo possui hipotenusa de medida a e catetos de medidas b e c, então $a^2 = b^2 + c^2$. Em palavras, o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos.*

Existem várias demonstrações diferentes deste teorema. A demonstração que vamos explicar começa com a observação de que com quatro cópias do triângulo retângulo de catetos b e c é possível montar um quadrado de lado $b + c$ como está indicado na figura a seguir.

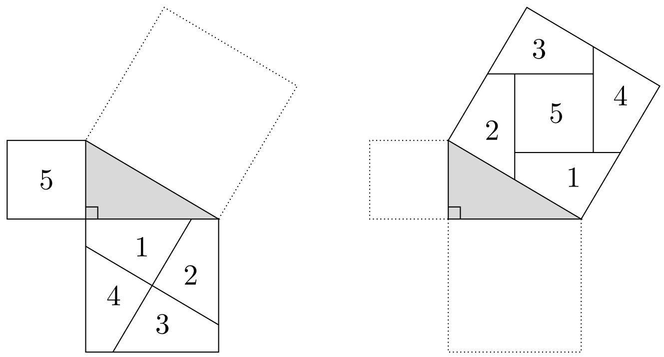


Agora vamos calcular a área deste quadrado de duas maneiras diferentes. Por um lado ele é um quadrado de lado $b+c$. Logo a sua área é igual a $(b+c)^2$. Por outro lado este quadrado é a união de um quadrado de lado a com quatro triângulos retângulos de catetos b e c. Somando as áreas destas figuras, vemos que a área do quadrado de lado $b+c$ também pode ser expressa por $4 \cdot \dfrac{bc}{2} + a^2$. Igualando as duas expressões obtidas para a área do quadrado de lado $b+c$ obtemos a igualdade $4 \cdot \dfrac{bc}{2} + a^2 = (b+c)^2$. Desenvolvendo e simplificando obtemos

$$4 \cdot \frac{bc}{2} + a^2 = (b+c)^2 \quad \Rightarrow \quad 2bc + a^2 = b^2 + 2bc + c^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 \ .$$

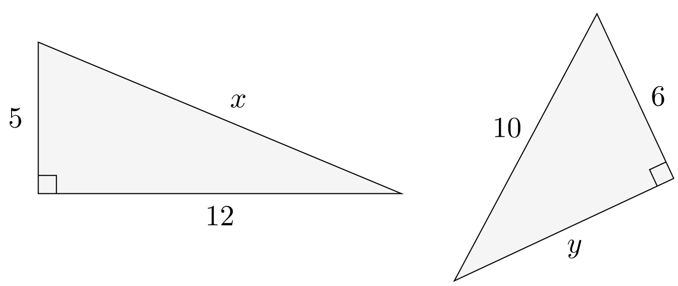
A última igualdade $a^2 = b^2 + c^2$ é exatamente a relação que queríamos obter.

Podemos interpretar geometricamente o Teorema de Pitágoras do seguinte modo: se são construídos quadrados sobre os três lados de um triângulo retângulo, então “*a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual a área do quadrado construído sobre a hipotenusa.*” A figura a seguir (devida a Henry Perigal) mostra que é possível dividir os quadrados construídos sobre os catetos em 5 pedaços que podem ser reorganizados para montar o quadrado construído sobre a hipotenusa. Desta figura vemos exatamente esta interpretação para o Teorema de Pitágoras: a soma $b^2 + c^2$ das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual a área a^2 do quadrado construído sobre a hipotenusa.



O Teorema de Pitágoras nos fornece uma relação entre os três lados de um triângulo retângulo. Isto implica que se são conhecidos dois dos lados de um triângulo retângulo então é possível calcular o comprimento do terceiro lado. Vejamos isso em alguns exemplos.

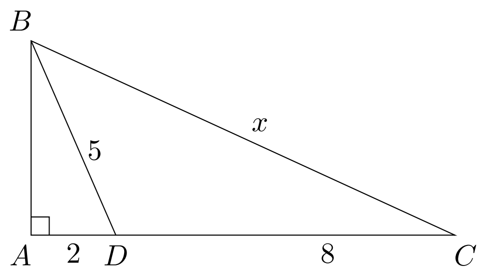
Exemplo 1: Nas figuras a seguir vemos dois triângulos retângulos. Utilizando os comprimentos dos lados dados nas figuras, calcule os comprimentos dos lados x e y.



Solução. Na figura da esquerda vemos um triângulo retângulo de hipotenusa x e de catetos 5 e 12. Aplicando o Teorema de Pitágoras obtemos a relação $x^2 = 5^2 + 12^2$. Logo $x^2 = 169$ e portanto $x = \sqrt{169} = 13$.

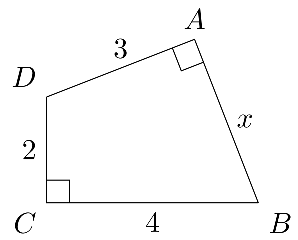
Na figura da direita vemos um triângulo retângulo de hipotenusa 10 e de catetos y e 6. Aplicando o Teorema de Pitágoras obtemos $10^2 = y^2 + 6^2$. Daí $100 = y^2 + 36 \Rightarrow y^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow y = \sqrt{64} = 8$.

Exemplo 2: Na figura a seguir os pontos A, D e C estão alinhados. Determine o comprimento x da hipotenusa do triângulo retângulo ABC.



Solução. Vamos chamar de y o comprimento do segmento AB. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABD obtemos $5^2 = y^2 + 2^2$. Daí, $25 = y^2 + 4$ e portanto $y^2 = 25 - 4 = 21$. Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, obtemos $x^2 = y^2 + 10^2$. Logo $x^2 = 21 + 100 \Rightarrow x^2 = 121 \Rightarrow x = \sqrt{121} = 11$.

Exemplo 3: Na figura a seguir, o quadrilátero $ABCD$ possui dois ângulos retos. Determine o comprimento do lado AB.

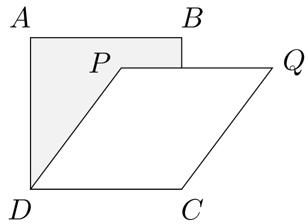


Solução. Trace o segmento BD e seja y o comprimento deste segmento. Observe que o quadrilátero $ABCD$ é a união de dois triângulos

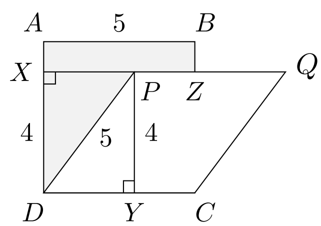
“geometria˙diagra
2015/7/22
page 129
Estilo OBMEP

retângulos BCD e ABD. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo BCD obtemos $y^2 = 2^2 + 4^2$, ou seja, $y^2 = 20$. Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABD, obtemos $y^2 = x^2 + 3^2$. Daí, $x^2 = y^2 - 9 = 20 - 9 = 11$ e portanto $x = \sqrt{11}$.

Exemplo 4: Na figura plana a seguir, sobre o quadrado cinza $ABCD$ com 25 cm^2 de área foi desenhado um losango branco $PQCD$ com 20 cm^2 de área. Determine a área cinza do quadrado que não ficou encoberta pelo losango.



Solução. Prolongue o segmento PQ até ele intersectar o segmento AD no ponto X e seja Y o ponto do segmento DC tal que PY é uma altura do losango $PQCD$. Seja Z o ponto de interseção dos segmentos PQ e BC. Observe que a figura sombreada é formada pelo retângulo $ABZX$ e pelo triângulo retângulo DPX. Para calcular a área desta figura vamos somar as áreas deste retângulo e deste triângulo retângulo.



O losango tem base $\overline{DC} = 5$ cm, tem altura PY, e sua área é igual a 20 cm^2. Como a área de um losango é igual ao produto da base pela

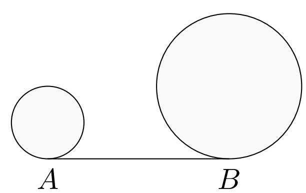
“geometria˙diagra
2015/7/22
page 130
Estilo OBMEP

altura, temos que $\overline{DC} \times \overline{PY} = 20$. Daí $5 \times \overline{PY} = 20$ donde $\overline{PY} = 4$ cm. Como $\overline{XD} = \overline{PY} = 4$ cm, vemos que $\overline{XA} = 5 - 4 = 1$ cm.

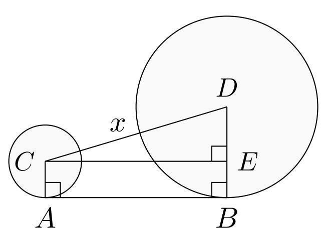
Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo DPX de cateto $\overline{XD} = 4$ cm e de hipotenusa $\overline{DP} = 5$ cm, concluímos que $\overline{XP} = 3$ cm.

Daí o retângulo $ABZX$ tem base $\overline{XZ} = 5$ cm e tem altura $\overline{XA} = 1$ cm. A área desse retângulo é então igual a $5 \times 1 = 5$ cm^2. Já o triângulo retângulo DPX tem base $\overline{XP} = 3$ cm e tem altura $\overline{XD} = 4$ cm. Sua área é então igual a $\dfrac{3 \times 4}{2} = 6$ cm^2. Finalmente, a área desejada da região cinza é igual a $5 + 6 = 11$ cm^2.

Exemplo 5: Na figura a seguir, AB é um segmento tangente às circunferências de raios 2 cm e 5 cm. Se o comprimento do segmento AB é igual a 10 cm, determine a distância entre os centros das circunferências.



Solução. Sejam C e D os centros das circunferências. Desenhe os segmentos CA e DB e desenhe o segmento CE paralelo a AB, como na figura a seguir.



Nesta figura temos que $\overline{CA} = 2\ cm$ e $\overline{DB} = 5$ cm, pois estes dois segmentos são raios das circunferências. Além disso, $\overline{CE} = \overline{AB} = 10$ cm e $\overline{EB} = \overline{CA} = 2$ cm, pois $ABEC$ é um retângulo. Daí $\overline{DE} = \overline{DB} - \overline{EB} = 5 - 2 = 3$ cm. Se $x = \overline{CD}$, pelo Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo retângulo CDE, obtemos

$$x^2 = 10^2 + 3^2 \;\Rightarrow\; x^2 = 109 \;\Rightarrow x = \sqrt{109} \text{ cm.}$$

Exercícios:

1. Calcule o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 10.

2. Calcule o comprimento da diagonal de um retângulo 6×8.

3. Um retângulo tem base de 9 cm e tem diagonal de 15 cm. Determine a altura deste retângulo.

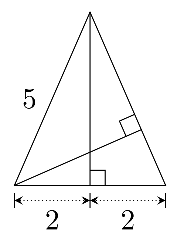
4. Um quadrado tem diagonal com 8 cm de comprimento. Qual é a área deste quadrado?

5. Para o triângulo isósceles de lados 5, 5 e 4:

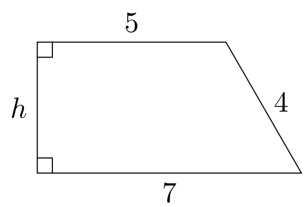
   (a) Determine a altura relativa à base de comprimento 4.

   (b) Determine a área do triângulo.

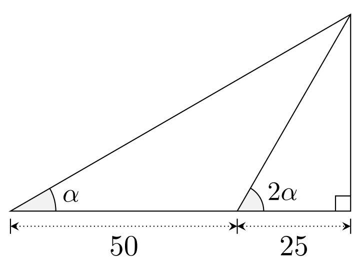
   (c) Utilizando o fato de que a área de um triângulo é a metade da base vezes a altura, determine a altura relativa a base de comprimento 5.



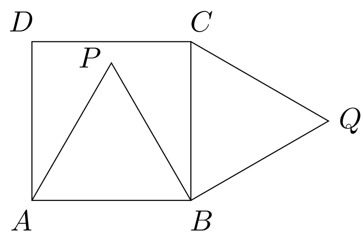
6. Determine a altura e a área do trapézio da figura a seguir.



7. Uma pessoa a 25 metros de um prédio vertical enxerga o topo do prédio segundo certo ângulo. Afastando-se do prédio perpendicularmente, esta pessoa caminha 50 metros e passa a avistar o topo do prédio com a metade do ângulo anterior. Qual é a altura do prédio?

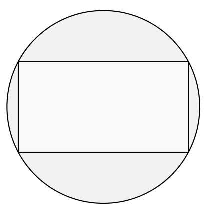


8. Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado de lado 1. Os triângulos ABP e BQC são triângulos equiláteros. Calcule o comprimento do segmento PQ.

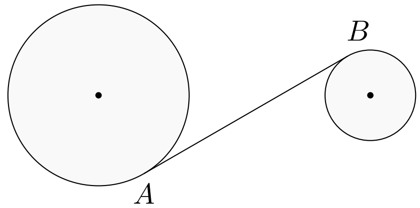


9. Um triângulo ABC está inscrito em uma circunferência com 5 cm de raio de modo que o lado AB é um diâmetro. Se $\overline{AC} = 8$ cm, determine o comprimento do lado BC.

10. Na figura a seguir um retângulo 15×8 está inscrito em uma circunferência. Determine o raio desta circunferência.

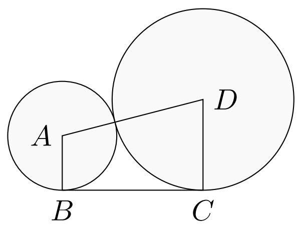


11. Na figura a seguir, uma circunferência tem raio 4 e a outra tem raio 2. Se a distância entre os centros é igual a 12, determine o comprimento do segmento AB, tangente comum às duas circunferências.

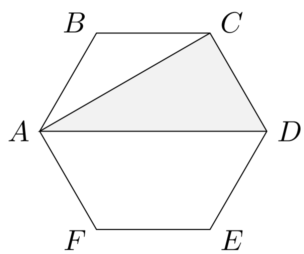


12. Na figura a seguir, a circunferência de centro em A tem raio 3 e a circunferência de centro em D tem raio 5. Se uma circunferência

é tangente a outra e se BC é um segmento tangente a estas duas circunferências, determine os comprimentos dos segmentos AD e BC.



13. Na figura a seguir, $ABCDEF$ é um hexágono regular de lado 2 cm.



(a) Qual é a medida do ângulo $A\hat{C}D$?

(b) Qual é o comprimento da diagonal AD?

(c) Calcule o comprimento da diagonal AC.

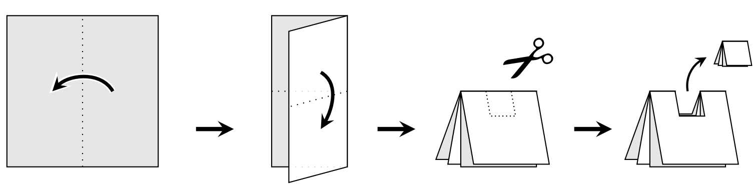
(d) Calcule a área do triângulo ACD.

8.3 Visualização de figuras tridimensionais

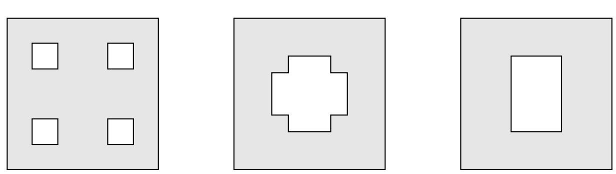
Apesar de muitos objetos tridimensionais terem componentes que são figuras planas, como as suas faces, somente o estudo da Geometria Plana não garante um pleno entendimento da Geometria Espacial, das suas particularidades, da visualização e da representação de figuras espaciais em uma folha plana. Deste modo é necessário um estudo específico da Geometria Espacial para, pelo menos, promover ou aumentar as habilidades de interpretar e representar objetos espaciais. Nesta seção, então, apresentamos uma coletânea de questões de provas da OBMEP e dos Bancos de Questões que exploram a visualização de objetos tridimensionais. Estudando estas questões esperamos que os alunos do PIC adquiram ou aprimorem suas habilidades de visualizar e interpretar figuras espaciais. Bons estudos!

Exercícios:

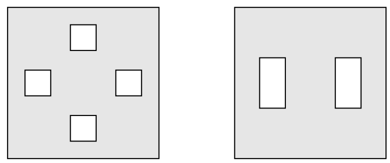
1. **(OBMEP 2010 – N1Q8 – 1ª fase)** Joãozinho dobrou duas vezes uma folha de papel quadrada, branca de um lado e cinza do outro, e depois recortou um quadradinho, como na figura.



Qual das figuras abaixo ele encontrou quando desdobrou completamente a folha?

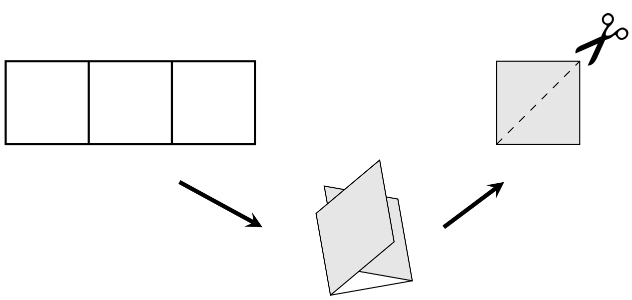


(a) (b) (c)

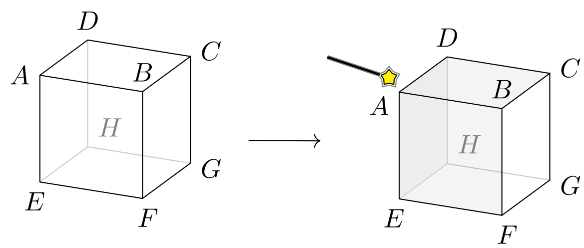


(d) (e)

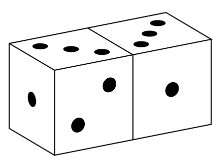
2. **(OBMEP 2012 – N1Q14 – 1ª fase)** Juliana cortou uma tira de papel de 4 cm por 12 cm e a dobrou do modo indicado na figura, obtendo assim um quadrado. Em seguida, ela cortou o quadrado diagonalmente, como mostra a figura. Com os pedaços obtidos, ela montou dois novos quadrados. Qual é a diferença entre as áreas destes quadrados?



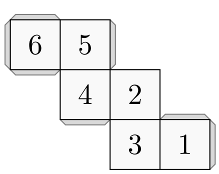
3. **(OBMEP 2014 – N1Q11 – 1ª fase)** Talia tem um cubo mágico; toda vez que ela toca um vértice deste cubo, as três faces que se encontram neste vértice mudam de branco para cinza ou de cinza para branco. Começando com o cubo totalmente branco, ela tocou o vértice A e as três faces $ABCD$, $ABFE$ e $ADHE$ mudaram de branco para cinza, como na figura. Ela continuou tocando todos os outros vértices uma única vez. Quantas faces do cubo terminaram brancas?



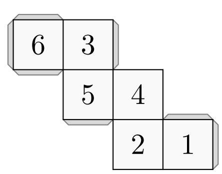
4. **(OBMEP 2010 – N1Q11 – 1ª fase)** Em um dado a soma dos números de duas faces opostas é sempre 7. Dois dados iguais foram colados como na figura. Qual é a soma dos números que estão nas faces coladas?



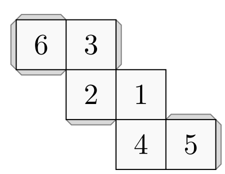
5. **(OBMEP 2011 – N1Q19 – 1ª fase)** Num dado comum, a soma dos pontos de duas faces opostas é sempre 7. É possível construir um dado comum dobrando e colando uma das peças de papelão a seguir. Que peça é esta?



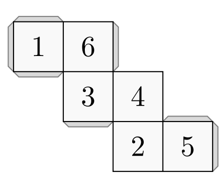
(a)



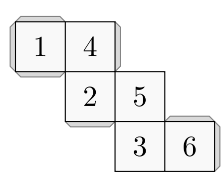
(b)



(c)

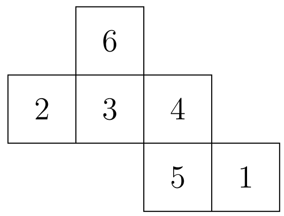


(d)

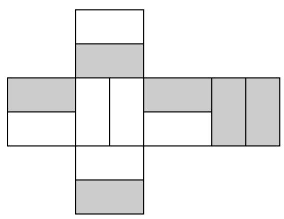


(e)

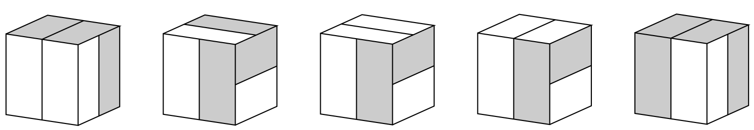
6. **(OBMEP 2012 – N1Q8 – 1ª fase)** Um cubo foi montado a partir da planificação mostrada na figura. Qual é o produto dos números das faces deste cubo que tem uma aresta comum com a face de número 1?



7. **(OBMEP 2006 – N1Q17 – 1ª fase)** Para montar um cubo, Guilherme recortou um pedaço de cartolina branca e pintou de cinza algumas partes, como na figura a seguir.



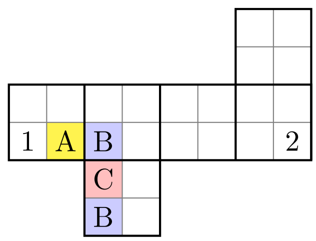
Qual das figuras abaixo representa o cubo construído por Guilherme?



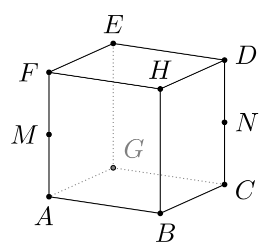
(a) (b) (c) (d) (e)

8. **(OBMEP 2012 – N2Q18 – 1ª fase)** Cada face de um cubo está dividida em quatro quadrados coloridos com as cores A, B e C, de modo que quaisquer dois quadrados com um lado comum têm cores diferentes. A figura a seguir, mostra uma planificação

deste cubo, com a indicação das cores de quatro quadrados. Quais são as cores dos quadrados indicados com 1 e 2, respectivamente?



9. (Banco de Questões 2013 – Nível 1 – questão 6) Uma formiga esperta, que passeia sobre a superfície do cubo ilustrado na figura a seguir, faz sempre o menor caminho possível entre dois pontos. O cubo tem arestas de tamanho 1 cm.



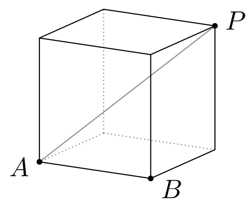
Qual distância a formiga esperta percorrerá se ela for:

(a) Do vértice A ao vértice B?

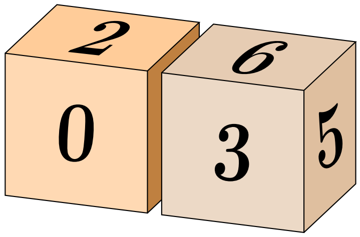
(b) Do ponto M ao ponto N?

(c) Do vértice A ao vértice D?

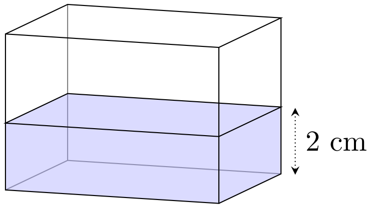
10. Se A e P são vértices opostos de um cubo, então o segmento AP é uma **diagonal do cubo**. Calcule o comprimento da diagonal AP de um cubo de aresta $\overline{AB} = 5$ cm.



11. **(OBMEP 2011 – N1Q20 – 1ª fase)** Pedro tem dois cubos com faces numeradas, com os quais ele consegue indicar os dias do mês de 01 a 31. Para formar as datas, os cubos são colocados lado a lado e podem ser girados ou trocados de posição. A face com o 6 também é usada para mostrar o 9. Na figura a seguir, os cubos mostram o dia 03. Qual é a soma dos números das quatro faces não visíveis no cubo da esquerda?

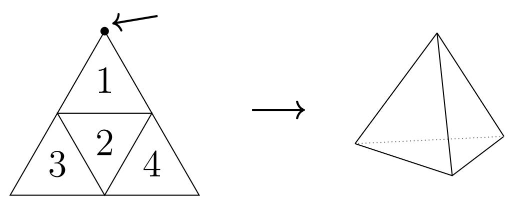


12. (Banco de Questões 2014 – Nível 1 – questão 27) Maria encheu uma caixa em forma de paralelepípedo retangular com 160 ml de água e a apoiou em uma das suas faces, como na figura a seguir:



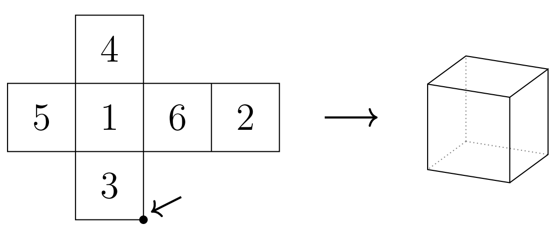
Maria, então, mediu a altura que a água atingiu e obteve 2 cm. Depois, ela repetiu o experimento apoiando a caixa em outras faces e obteve alturas de 4 cm e 5 cm. Quais são as dimensões (largura, altura e comprimento) da caixa?

13. **(OBMEP 2011 – N1Q5 – 2ª fase)** As figuras mostram planificações de sólidos com faces numeradas. Após montados estes sólidos, dizemos que o valor de um vértice é a soma dos números escritos nas faces que contêm este vértice. Por exemplo, a figura a seguir mostra a planificação de uma pirâmide; quando essa pirâmide é montada, o valor do vértice correspondente ao ponto indicado na figura é $1 + 3 + 4 = 8$.

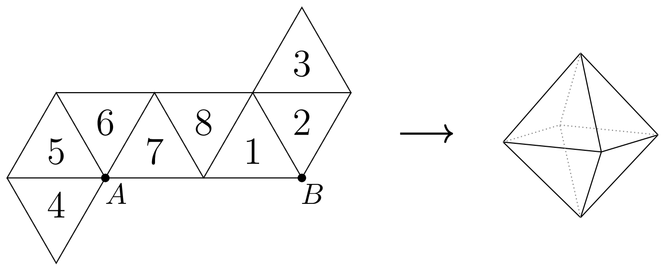


(A) Qual é o maior valor de um vértice da pirâmide acima?

(B) A figura mostra a planificação de um cubo. Qual é o valor do vértice correspondente ao ponto indicado?

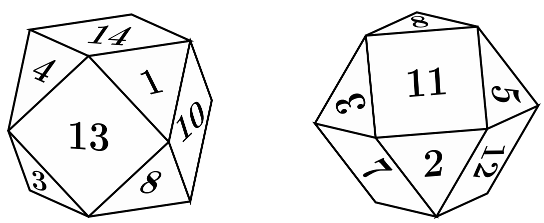


(C) A figura mostra a planificação de um sólido chamado octaedro. Qual é o valor do vértice correspondente ao ponto A?

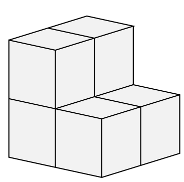


(D) Qual é o valor do vértice correspondente ao ponto B na planificação do item anterior?

14. **(OBMEP 2012 – N2Q14 – 1ª fase)** Fazendo oito cortes em um cubo, perto de seus vértices, obtemos um sólido com 14 faces, que numeramos de 1 a 14. Na figura observamos esse sólido sob dois pontos de vista diferentes. Qual é o número da face oposta à face de número 13?



15. **(OBMEP 2012 – N1Q4 – 2ª fase)** Cláudia gosta de montar sólidos colando cubinhos de aresta 1 cm. Ela sempre usa um pingo de cola entre duas faces de cubinhos que ficam em contato; por exemplo, para montar o sólido da figura a seguir ela usou 7 pingos de cola.

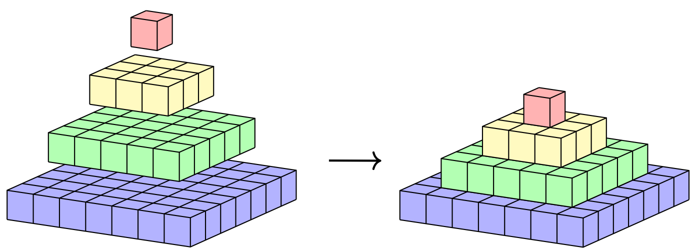


"geometria˙diagra
2015/7/22
page 143
Estilo OBMEP

(A) Quantos pingos ela vai usar para montar um cubo de aresta 2 cm?

(B) Quantos pingos ela vai usar para montar um cubo de aresta 3 cm?

(C) Cláudia montou o sólido da figura a seguir, com quatro camadas de cubinhos. Quantos pingos de cola ela usou?



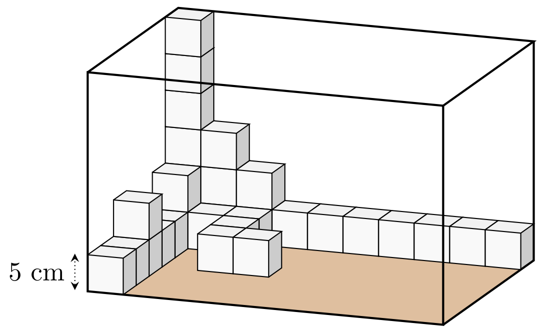
16. (Banco de Questões 2007, Nível 2, lista 3, questão 8) Se dividirmos um cubo de 1 metro de aresta em cubinhos de 1 milímetro de aresta, que altura terá uma coluna formada por todos os cubinhos, dispostos sucessivamente um em cima do outro?

17. **(OBMEP 2005 – N1Q3 – 2ª fase)** Emília quer encher uma caixa com cubos de madeira de 5 cm de aresta. Como mostra a figura, a caixa tem a forma de um bloco retangular, e alguns cubos já foram colocados na caixa.

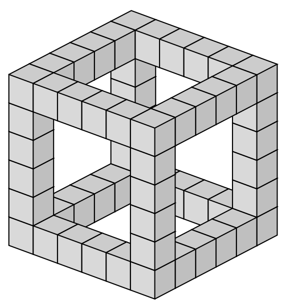
(A) Quantos cubos Emília já colocou na caixa?

(B) Calcule o comprimento, a largura e a altura da caixa.

(C) Quantos cubos ainda faltam para Emília encher a caixa completamente, se ela continuar a empilhá-los conforme indicado na figura?



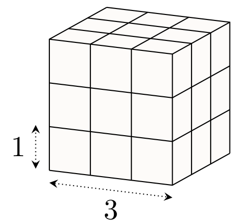
18. (Banco de Questões 2011 – Nível 2 – questão 64) O esqueleto de um cubo $6 \times 6 \times 6$, formado por cubinhos $1 \times 1 \times 1$, é mostrado na figura.



(a) Quantos cubinhos formam este esqueleto?

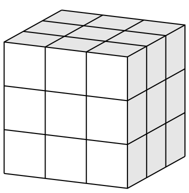
(b) É dado um cubo $7 \times 7 \times 7$ formado por cubinhos $1 \times 1 \times 1$. Quantos cubinhos devemos retirar para obter um esqueleto do cubo $7 \times 7 \times 7$.

19. **(OBMEP 2005 – N1Q13 – 1ª fase)** Um cubo de madeira tem 3 cm de aresta. Duas faces opostas foram pintadas de amarelo e as outras quatro faces foram pintadas de verde. Em seguida o cubo foi serrado em 27 cubinhos de 1 cm de aresta, conforme indicado no desenho. Quantos cubinhos têm faces pintadas com as duas cores?



20. **(OBMEP 2008 – N1Q6 – 2ª fase)** Xaveco está brincando de montar cubos grandes usando cubinhos menores, todos brancos e de mesmo tamanho.

(A) Primeiro ele montou um cubo com 27 cubinhos e pintou de cinza duas faces vizinhas desse cubo, como na figura a seguir. Quantos cubinhos ficaram sem nenhuma face pintada de cinza?



(B) A seguir, ele montou outro cubo com 27 cubinhos, mas desta vez pintou de cinza duas faces opostas deste cubo. Quantos cubinhos ficaram sem nenhuma face pintada de cinza?

(C) Depois, ele montou um cubo com 64 cubinhos e pintou de cinza três faces deste cubo. Quais são os possíveis números de cubinhos que ficaram sem nenhuma face pintada de cinza?

(D) Para terminar, Xaveco montou mais um cubo e pintou de cinza algumas de suas faces, de modo que 96 cubinhos ficaram sem nenhuma face pintada. Quantos cubinhos ele usou e quantas faces do cubo maior ele pintou?

Referências Bibliográficas

[1] CADAR, Luciana e DUTENHEFNER, Francisco. *Encontros de Aritmética*. Apostila do PICOBMEP.

[2] FOMIN, Dmitri et al. *Círculos Matemáticos – a experiência russa*. Rio de Janeiro. IMPA. 2010.

[3] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar – Volume 2 Geometria Euclidiana Plana*. SBM.

[4] WAGNER, Eduardo. *Teorema de Pitágoras e Áreas*. Apostila 3. PICOBMEP.

[5] Provas anteriores da OBMEP.

[6] Bancos de Questões da OBMEP.

Esta obra foi produzida nas
oficinas da Imos Gráfica e Editora na
cidade do Rio de Janeiro