Encontro 13: MDC e MMC - Fatoração simultânea e resolução de exercícios .

Método da Fatoração Simultânea

Primeiro escrevemos os números lado a lado, separados por vírgula. Colocamos uma reta vertical separando os números que serão divididos e os divisores.

Dividimos todos os números por um primo divisor de todos. Assim, dividimos por cada primo até que não seja possível dividir, e passamos para o próximo divisor primo, destacando aqueles divisores que dividem todos os números. No nosso exemplo, 2 e 3, logo o MDC é 6.

12,	36,	18	2
6,	18,	9	3
2,	6,	3	3
2,	2,	1	2
1,	1,	1	

Para obter o MMC, basta continuar dividindo os números pelos fatores primos, independente desses fatores dividirem todos os números ou não.

No exemplo em questão, o MMC será $2^2 x 3^2 = 36$.

Exercícios

Exercício I - Calcule mdc(100; 140).

Utilizando a decomposição simultânea dos dois números, sempre dividindo os números pelo menor número primo possível, temos:

$$\begin{array}{rcr|l} 100 & , & 140 & 2 \\ 50 & , & 70 & 2 \\ 25 & , & 35 & 5 \\ 5 & , & 7 & \end{array}$$

mdc(100; 140) = 2^2 x 5 = 20

Exercício II - Calcule mdc(1500; 1800).

$$
\begin{array}{rcr|l}
1500 & , & 1800 & 2 \\
750 & , & 900 & 2 \\
375 & , & 450 & 3 \\
125 & , & 150 & 5 \\
25 & , & 30 & 5 \\
5 & , & 6 &
\end{array}
$$

mdc(1500; 1800) = $2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$.

Exercício III – Calcule mmc(12; 90).

$$
\begin{array}{rr|l}
12\,, & 90 & 2 \\
6\,, & 45 & 2 \\
3\,, & 45 & 3 \\
1\,, & 15 & 3 \\
1\,, & 5 & 5 \\
1\,, & 1 &
\end{array}
$$

mmc(12; 90) = $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$.

Exercício IV – Calcule mmc(75; 84).

$$
\begin{array}{rcr|l}
75 & , & 84 & 2 \\
75 & , & 42 & 2 \\
75 & , & 21 & 3 \\
25 & , & 7 & 5 \\
5 & , & 7 & 5 \\
1 & , & 7 & 7 \\
1 & , & 1 &
\end{array}
$$

mmc(75; 84) = 2^2 x 3 x 5^2 x 7 = 2100.

Exercício V – Calcule o mdc e o mmc de 980 e 1050.

$$
\begin{array}{rcr|c}
980 & , & 1050 & \boxed{2} \\
490 & , & 525 & 2 \\
245 & , & 525 & 3 \\
245 & , & 175 & \boxed{5} \\
49 & , & 35 & 5 \\
49 & , & 7 & \boxed{7} \\
7 & , & 1 & 7 \\
1 & , & 1 &
\end{array}
$$

mmc(980; 1050) = $2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7^2 = 14700$.

mdc(980; 1050) = $2 \times 5 \times 7 = 70$

Exercício VI - Calcule o mdc(6930; 9750).

$$
\begin{array}{rcr|c}
6930 & , & 9750 & \boxed{10} \\
693 & , & 975 & 5 \\
693 & , & 195 & 5 \\
693 & , & 39 & \boxed{3} \\
231 & , & 13 &
\end{array}
$$

Como 13 e 231 não primos entre si, não é necessário continuar, pois não obteremos mais fatores em comum. Multiplicando os números marcados obtemos mdc(6930; 9750) = 10 x 3 = 30.

Exercício VII – Uma bibliotecária recebe 130 livros de Matemática e 195 livros de Português. Ela quer arruma-los em estantes, colocando igual quantidade de livros em cada estante, sem misturar livros de Matemática e de Português na mesma estante. Quantos livros ela deve colocar em cada estante para que o número de estantes utilizadas seja o menor possível?

Resolução: Denotando por n o número de livros que a bibliotecária vai colocar em cada estante, temos 130 / n = número de estantes para os livros de Matemática e 195 / n = número de estantes para os livros de Português. Isso mostra que n deve ser um divisor comum de 130 e de 195, pois o número de estantes utilizadas e inteiro. Sabemos que, quando aumentamos o denominador de uma fração, esta fração diminui; por exemplo, 27/10 e menor do que 27/8. Logo, quanto maior for o denominador n, menores serão as frações 130/n e 195/n, o que signica que menor será o número de estantes utilizadas. Vemos, assim, que n deve ser o maior divisor comum de 130 e 195. Como as decomposições destes números em fatores primos são 130 = 2 x 5 x 13 e 195 = 3 x 5 x 13, segue que o mdc de 130 e 195 é 5 x 13 = 65. Logo, a bibliotecária vai colocar 65 livros em cada estante, o número de estantes para os livros de Matemática é 130/65 = 2 e o número de estantes para os de Português e 195 / 65 = 3, o que dá um total de 2 + 3 = 5 estantes.

Exercício VIII – No ponto de ônibus perto de sua casa, Quinzinho pode pegar os ônibus de duas linhas para ir à escola. Os ônibus de uma linha passam de 15 em 15 minutos e os da outra de 25 em 25 minutos, sendo que às 7h30m da manhã os ônibus das duas linhas passam juntos.

(a) A que horas passarão juntos novamente?

(b) Entre as 7h30min da manhã e a meia noite, quais são os horários em que os ônibus passam juntos neste ponto perto da casa de Quinzinho?

(a) Fatorando temos 15 = 3 x 5 e 25 = 5^2. Portanto o menor múltiplo comum de 15 e 25 e 75 = $3x5^2$. Assim, os dois ônibus passarão juntos novamente no ponto a cada 75 minutos, ou seja, a cada 1h15min. Logo, os ônibus passarão juntos novamente no ponto perto da casa de Quinzinho, as 7h30min + 1h15min = 8h45min.

(b) Para obter os horários em que os ônibus passarão juntos no ponto de ônibus perto da casa de Quinzinho, devemos ir somando 1h15min, obtendo 8h45min, 10h, 11h15min, 12h30min, 13h45min, 15h, 16h15min, 17h30min, 18h45min, 20h, 21h15min, 22h30min e 23h45min. O próximo ônibus só passa depois da meia noite.

Exercício IX - Quantos numeros entre 1 e 2012 são múltiplos de 6 ou múltiplos de 15?

Resolução - Para encontrar a quantidade de múltiplos de 6 compreendidos entre 1 e 2012, basta usar o algoritmo da divisão e observar que 2012=335x6+2. Isto mostra que 6x1, 6x2, ... , 6x335 são os múltiplos de 6 entre 1 e 2012, ou seja, temos 335 destes múltiplos. Do mesmo modo, como 2012 = 134x15+2, vemos que existem 134 múltiplos de 15 entre 1 e 2012.
Neste total de 335+134 = 469, alguns números aparecem contados duas vezes, pois são múltiplos de 6 e de 15 ao mesmo tempo. Por exemplo, os números 6 x 15 e 2 x 6 x 15 foram contados tanto como múltiplos de 6 quanto como múltiplos de 15. Lembre que os múltiplos de 6 e de 15 são, também, múltiplos de mmc(6; 15) = 30. Como 2012 = 67 x 30 + 2, podemos concluir que existem 67 múltiplos de 30 entre 1 e 2012. Logo, o número de múltiplos de 6 ou 15 entre 1 e 2012 é 469 - 67 = 402.