P1) As engrenagens se encaixam duas a duas, girando uma no sentido horário e a outra no sentido anti-horário (por exemplo).

Para que elas rodassem todas simultaneamente, precisaríamos ter um nº par de engrenagens e no problema temos 11.

Portanto, a resposta é não.

P2) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Para que seja possível, precisamos separar estes números em dois grupos de mesma soma (um grupo com sinal (+) e outro com sinal (−)).

Entretanto, se somarmos todos os nº de 1 até 10 a soma é 55. Como 55 é ímpar, não podemos separar os nºs dados em dois grupos iguais.

Portanto, a resposta é não.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$1+10=11$
$2+9=11$
$3+8=11$
$4+7=11$
$5+6=11$

temos 5 pares de nºs com soma 11, mas precisaríamos de um nº par de pares para que conseguisse nos obter zero.

P3) Nº de peças de um dominó?

00	11	22	33	44	55	66
01	12	23	34	45	56	
02	13	24	35	46		
03	14	25	36			
04	15	26				
05	16					
06						

$7+6+5+4+3+2+1 =$
$= 8+8+8+4 = 28$ peças

a)

Cadeia: [5 | 4] [4 | 3] [3 | 1] ... [|] ↓?

Cada nº aparece 8 vezes (par) no conjunto de peças.

Da maneira como estão dispostos os dominós na cadeia, cada nº aparece formando um par:

[| 2] [2 |]

no interior da cadeia. Todos os nºs, inclusive o nº 5, aparecerão → então um nº par de vezes no interior da cadeia, restando somente uma célula 5 para ficar na extremidade final.

b) Retirando 7 peças, temos 21 peças restantes.

Cadeia: [3 | 2] [2 | 1] [1 |] ... [|]

Retirando estas 7 peças, temos cada nº aparecendo 7 (ímpar) vezes no conjunto de peças.
Como cada nº deve aparecer um nº par de vezes na cadeia, não será possível formar uma cadeia com todas as peças.

P4) a) Soma de dois nºs igual a 9999.
Vamos começar pensando nos possíveis algarismos não nulos cuja soma é 9: 1+8, 2+7, 3+6 e 4+5.

$$\begin{array}{r} 1818 \\ +8181 \\ \hline 9999 \end{array} \quad \text{Sim!} \qquad \begin{array}{r} 3366 \\ +6633 \\ \hline 9999 \end{array}$$

b) No item a, para obter a soma 9999 (nº par de algarismos) fazemos uma permutação dos algarismos cuja soma é 9.
Na permutação os algarismos trocam de lugar 2 a

2. Como temos um nº par de algarismos, isso é possível.

No caso da soma ter que ser $\underbrace{99999}_{\text{nº ímpar de algarismos}}$ não é possível fazer esta permutação 2 a 2. Portanto a resposta é não!

P5)

$S_1\ S_2\ S_3$
$S_1\ S_4\ S_5$
$S_1\ S_6\ S_7$

Escolhendo um soldado ao acaso, em cada noite que ele trabalha, ele está na companhia de dois outros soldados. Além dele tem 99 outros soldados. Como 99 é ímpar, não é possível formar duplas para trabalhar com este soldado de modo que cada soldado apareça uma vez (vai sobrar um soldado sem dupla).

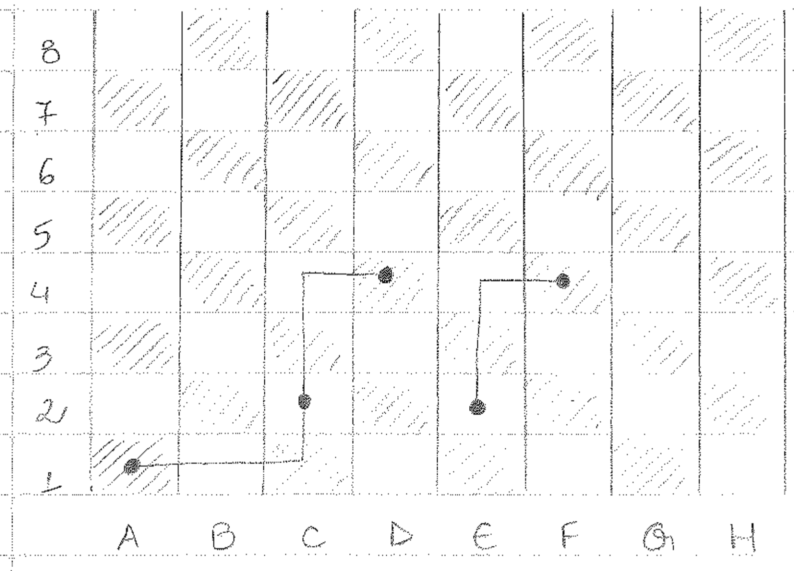
P6)

$$\underbrace{\underbrace{\text{Ímpar} + \text{Ímpar}}_{\text{par}} + \underbrace{\text{Ímpar} + \text{Ímpar}}_{\text{par}}}_{\text{par}} + \text{Ímpar}$$

$$\text{par} + \text{Ímpar} = \text{Ímpar}$$

Como 100 é par e a soma de 5 nºs ímpares é sempre ímpar, não é possível!

② Tabuleiro de Xadrez: P7)



Cavalo: movimentos em L.

1: clara → escura

2: clara → escura → clara

3: clara → ... → escura

4: clara → ... → clara

nº ímpar de movimentos: clara → ... → escura
escura → ... → clara

nº par de mov: clara → ... clara
escura → ... escura

É possível um cavalo começar na posição A1 e terminar em H8 visitando cada um dos outros quadrados (cada uma das outras casas) exatamente uma vez?

Saindo de A1 escura, ele precisa visitar mais 63 casas sendo a última escura (63 movimentos).

partindo de uma casa escura

Nº ímpar de movimentos leva a uma casa clara! Mas a casa H8 é escura...
Então não é possível!

Problema 2

a) Uma volta completa em torno da pista tem a extensão de $1+2+6+4=13$ km. Por isso, para percorrer 14 km precisamos dar uma volta completa e percorrer mais 1 km. A única forma de percorrer 1 km, respeitando-se o sentido da corrida, é começando em A e terminando em B. Portanto a corrida deve começar em A, dar 1 volta completa e terminar em B.

b) Como $100 = 7\times 13 + 9$, uma corrida de 100 km corresponde a dar 7 voltas completas na pista e percorrer mais 9 km. A única forma de percorrer 9 km, respeitando-se o sentido da corrida, é começando em A e terminando em D. Portanto a corrida deve começar em A, dar 7 voltas completas e terminar em D.

c) Como sugerido nos itens acima, a solução do problema está baseada na idéia de dar tantas voltas completas sem exceder o comprimento da corrida e depois localizar estações convenientes para percorrer "o que falta". Do ponto de vista matemático, o que acabamos de falar é a expressão do algoritmo de divisão euclidiana de números inteiros, no caso com divisor igual a 13. Em outras palavras, temos o diagrama habitualmente utilizado na divisão euclidiana

$$\begin{array}{r|l} \text{dividendo (comprimento da corrida)} & \text{13 (divisor)} \\ \hline \text{resto ("o que falta")} & \text{quociente (número de voltas completas)} \end{array}$$

que representa a expressão $\text{dividendo} = 13\times \text{divisor} + \text{resto}$, sendo o resto um número natural menor do que 13. Logo o resto só pode ser um dos números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou 12.

Inicialmente, vejamos como podemos realizar corridas com de 1 km até 13 km; isto é feito por inspeção direta e o resultado é a tabela abaixo.

Extensão em km	*Posto de partida*	*Posto de chegada*
1	A	B
2	B	C
3	A	C
4	D	A
5	D	B
6	C	D
7	D	C
8	B	D
9	A	D
10	C	A
~~12~~ 11	C	B
~~13~~ 12	B	A
~~14~~ 13	Qualquer um	O mesmo de partida

A partir dessa tabela, podemos concluir que é possível realizar corridas cuja extensão é qualquer número inteiro de quilômetros maior do que 13. Para isso, basta ver que temos duas possibilidades:

1ª possibilidade: a extensão é múltiplo de 13: nesse caso escolhemos um posto qualquer e a corrida começa e termina no nesse posto, dando um número inteiro de voltas completas na pista. Por exemplo se a extensão da corrida é $208 = 13 \times 16$ km, basta dar 16 voltas completas na pista.

2ª possibilidade: a extensão não é múltiplo de 13: nesse caso, o resto da divisão da extensão da corrida por 13 é um dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Para cada um desses restos, a tabela acima fornece o posto de partida e o de chegada da corrida. Vejamos alguns casos:

- se o resto é 5, iniciamos a corrida no posto D e terminamos em B após um certo número de voltas completas na pista. Por exemplo, se a corrida tem $109 = 8 \times 13 + 5$ km, ela deve começar em D, dar 8 voltas completas até retornar a D e percorrer uma vez o trecho de D até B.
- se o resto é 11, iniciamos a corrida no posto C e terminamos em B após um certo número de voltas completas na pista. Por exemplo, se a corrida tem $245 = 18 \times 13 + 11$ km, ela deve começar em C, dar 18 voltas completas até retornar a C e percorrer uma vez trecho de C até B.

NÍVEL 3 - Prova da 2ª fase - Soluções

QUESTÃO 4 (a) Como saiu ímpar na primeira jogada, Isaura deu metade dos seus palitos para o Fernando; desse modo, Isaura ficou com 64 palitos, e como o número total de palitos é 256 segue que Fernando ficou com $256-64=192$ palitos.. Do mesmo modo, após a segunda jogada Isaura ficou com 32 palitos e Fernando com $256-32=224$ palitos. Na terceira jogada saiu par, e Fernando deu metade de seus palitos para a Isaura; logo, Fernando ficou com 112 palitos e Isaura com $256-112=144$ palitos.

Fernando	Isaura
128	128

$\xrightarrow[\text{1ª jogada}]{\text{ímpar}}$

Fernando	Isaura
192	64

$\xrightarrow[\text{2ª jogada}]{\text{ímpar}}$

Fernando	Isaura
224	32

$\xrightarrow[\text{3ª jogada}]{\text{par}}$

Fernando	Isaura
112	144

...

(b) *1ª solução*: Após qualquer jogada, o perdedor não pode ter mais que 127 palitos; de fato, se isso ocorresse, antes dessa jogada ele teria pelo menos $2\times128=256$ palitos, o que não pode acontecer. O ganhador terá então no mínimo $256-127=129$ palitos; logo, o ganhador da jogada anterior é aquele que tem mais palitos.

2ª solução: Suponhamos que em um dado momento Fernando tem x palitos e Isaura tem y palitos; notamos que como $x+y=256$, que é um número par, então x e y são ambos pares ou ambos ímpares. Se o jogo ainda não acabou, então x e y são pares, e depois da jogada seguinte podem acontecer as seguintes situações:

- saiu **par**: nesse caso Fernando fica com $\frac{x}{2}$ palitos e Isaura com $y+\frac{x}{2}$ palitos, ou seja, Isaura fica com mais palitos do que Fernando;
- saiu **ímpar**: nesse caso Fernando fica com $x+\frac{y}{2}$ palitos e Isaura com $\frac{y}{2}$ palitos, ou seja, Fernando fica com mais palitos do que Isaura.

Isso mostra que basta saber quem tem o maior número de palitos para determinar o resultado da última jogada: se Isaura tiver mais, o resultado foi par e se Fernando tiver mais, o resultado foi ímpar. No nosso caso, a partida acabou quando Fernando ficou com 101 palitos e Isaura com $256-101=155$ palitos. Logo o resultado da última jogada foi **par**.

(c) Aplicamos o raciocínio do item (b) para recuperar as jogadas uma a uma em ordem inversa, do seguinte modo:

Fernando	Isaura
101	155

Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **par**; então Fernando tinha $2\times101=202$ palitos e Isaura tinha $256-202=54$ palitos;

Fernando	Isaura
202	54

Fernando tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **ímpar**; então Isaura tinha $2\times54=108$ palitos e Fernando tinha $256-108=148$ palitos;

Fernando	Isaura
148	108

Fernando tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **ímpar**; então Isaura tinha $2\times108=216$ palitos e Isaura tinha $256-216=40$ palitos;

Fernando	Isaura
40	216

Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **par**; então Fernando tinha $2\times40=80$ palitos e Fernando tinha $256-80=176$ palitos;

Fernando	Isaura
80	176

Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **par**; então Fernando tinha $2\times80=160$ palitos e Fernando tinha $256-160=96$ palitos;

Fernando	Isaura
160	96

Fernando tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **ímpar**; então Isaura tinha $2\times 96 = 192$ palitos e Fernando tinha $256 - 192 = 64$ palitos;

Fernando	Isaura
64	192

Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **par**; então Fernando tinha $2\times 64 = 128$ palitos e Isaura tinha $256 - 128 = 128$ palitos. Essa é a situação inicial do jogo.

Logo a seqüência de jogadas dessa partida foi **par**, **ímpar**, **par**, **par**, **ímpar**, **ímpar**, **par**.

(d) Vamos aproveitar o trabalho do item anterior e fazer o seguinte diagrama do número de palitos de Fernando e Isaura, jogada a jogada:

Fernando	$128 = 2^7\times 1$	$64 = 2^6\times 1$	$160 = 2^5\times 5$	$80 = 2^4\times 5$	$40 = 2^3\times 5$	$148 = 2^2\times 37$	$202 = 2^1\times 101$	$101 = 2^0\times 101$
Isaura	$128 = 2^7\times 1$	$192 = 2^6\times 3$	$96 = 2^5\times 3$	$176 = 2^4\times 11$	$216 = 2^3\times 27$	$108 = 2^2\times 27$	$54 = 2^1\times 27$	$155 = 2^0\times 155$

Esse diagrama e outros exemplos semelhantes sugerem que, em um momento qualquer de uma partida, o número de palitos de Fernando e o número de palitos de Isaura se escrevem, respectivamente, como $2^n a$ e $2^n b$, onde a e b são inteiros ímpares. Além disso, se o jogo não acabou, então depois da próxima jogada eles terão $2^{n-1}a'$ e $2^{n-1}b'$ palitos, respectivamente, onde a' e b' também são inteiros ímpares.

Vamos mostrar que essas afirmativas são verdadeiras. Suponhamos que em alguma etapa de uma partida os dois jogadores têm, respectivamente, $2^n a$ e $2^n b$ palitos, onde a e b são inteiros ímpares, e que o jogo não acabou, ou seja, que $n \geq 1$. Se a próxima jogada sair par, então Fernando ficará com $\dfrac{2^n a}{2} = 2^{n-1}a$ palitos e Isaura ficará com $2^{n-1}a + 2^n b = 2^{n-1}(a + 2b)$ palitos. Como a é ímpar então $b' = a + 2b$ também é ímpar. Desse modo, após essa jogada, Fernando e Isaura ficarão com $2^{n-1}a$ e $2^{n-1}b'$ palitos, onde a e b' são ímpares. Um argumento idêntico leva à mesma conclusão no caso em que a próxima jogada sair ímpar, e acabamos de provar nossa afirmativa.

O jogo começa com ambos os jogadores com $128 = 2^7\times 1$ palitos, ou seja, com $n = 7$. Como uma partida acaba quando $n = 0$ e n decresce de uma unidade a cada jogada, segue imediatamente que qualquer partida acaba depois da sétima jogada.

QUESTÃO 5 (a) Após o ingresso de número 1 foram vendidos $100 - 1 = 99$ ingressos. Logo quem comprou o primeiro ingresso receberá $99\times 0{,}01 = 0{,}99$ reais. Do mesmo modo, após o ingresso de número 70 foram vendidos $100 - 70 = 30$ ingressos, logo quem comprou esse ingresso receberá $30\times 0{,}01 = 0{,}30$ reais.

(b) *1ª solução:* O valor da venda de 100 ingressos é R$600,00. O Grêmio terá que devolver 1 centavo para quem comprou o 99º ingresso, 2 centavos para o quem comprou o 98º ingresso e assim por diante, até 99 centavos para quem comprou o 1º ingresso. No total, o Grêmio terá que devolver

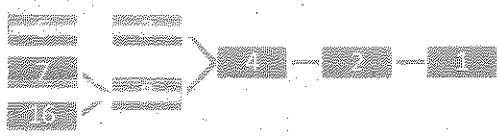
$$\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \cdots + \frac{99}{100} = \frac{1+2+3+\cdots+99}{100} = \frac{\frac{99\times 100}{2}}{100} = 49{,}50 \text{ reais}$$

e seu lucro será de $600 - 49{,}50 = 550{,}50$ reais.

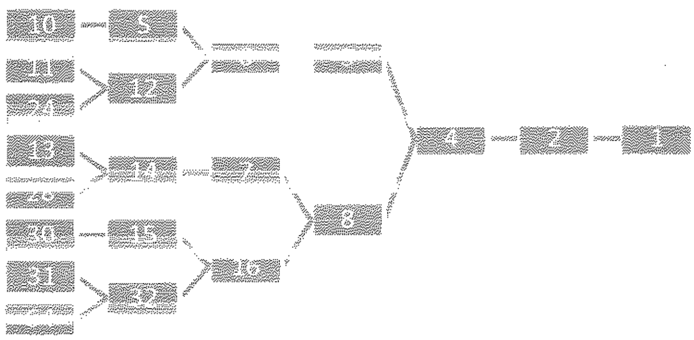
Questão 2 – Solução

a) A sequência é $37 \to 38 \to 19 \to 20 \to 10 \to 5 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$.

b) A única sequência de comprimento 3 é $4 \to 2 \to 1$. As sequências de comprimento 4 são $3 \to 4 \to 2 \to 1$ e $8 \to 4 \to 2 \to 1$; elas são obtidas a partir de $4 \to 2 \to 1$, a primeira acrescentando $4-1=3$ no início da sequência e a segunda acrescentando $2\times 4=8$ no início da sequência. Do mesmo modo, a sequência ímpar $3 \to 4 \to 2 \to 1$ dá origem à sequência par $6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$ e a sequência par $8 \to 4 \to 2 \to 1$ dá origem à sequência ímpar $7 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$ e à sequência par $16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$. Temos assim as três únicas sequências de comprimento 5, sendo duas delas pares e uma ímpar. O raciocínio pode ser representado pelo esquema abaixo.



c) *1ª solução:* Repetindo o esquema do item anterior, temos:



e assim temos 3 sequências pares e 2 ímpares de comprimento 6 e 5 sequências pares e 3 ímpares de comprimento 7.

2ª solução: Observamos que a sequência ímpar de comprimento cinco vai gerar 1 sequência par de comprimento seis; já as 2 sequências pares de comprimento cinco vão gerar 2 sequências pares de comprimento seis e 2 sequências ímpares de comprimento seis. Assim, temos 2 sequências ímpares de comprimento seis e $1+2=3$ sequências pares de comprimento seis, num total de $2+3=5$ sequências de comprimento 6. O mesmo argumento mostra que há 8 sequências de comprimento sete, sendo três ímpares e cinco pares..

Observação: A repetição desse argumento para valores sucessivos do comprimento mostra que, a partir do comprimento 3, o número de sequências ímpares é 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8,..., o número de sequências pares é 2, 3, 5, 8, 13,... e o número total de sequências é 3, 5, 8, 13, 21, ... Cada termo dessas sequências de valores, a partir do terceiro, é a soma dos dois anteriores; vemos assim que essas sequências, com a eventual omissão de termos iniciais, são a sequência 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,..., conhecida como *sequência de Fibonacci*.

comprimento	5	6	7	...	15	16
ímpares	1	2	3	...	144	233
pares	2	$2+1=3$	$3+2=5$	...	233	$233+144=377$
total	$1+2=3$	$2+3=5$	$3+5=8$	...	$144+233=377$	$233+377=610$

d) *1ª solução:* As 144 sequências ímpares de comprimento quinze vão gerar 144 sequências pares de comprimento dezesseis; já as 233 sequências pares de comprimento quinze vão gerar 233 sequências pares de comprimento dezesseis e 233 sequências ímpares de comprimento dezesseis. Assim, temos 233 sequências ímpares de comprimento dezesseis e $377=233+144$ sequências pares de comprimento dezesseis, num total de $233+377=610$ sequências.

2ª solução: A parte da sequência de Fibonacci que nos interessa é 1, 2, 3, 5, 8,....., 144, 233, 377, 610,... . O número de sequências ímpares de comprimento 15 (resp. 16) é o 15º (resp. 16º) termo dessa sequência, que é 144 (resp. 233); o número de sequências pares de comprimento 15 (resp.16) é o 16º (resp. 17º) termo, que é 233 (resp. 377) e o número total é o 17º (resp. 18º) termo, que é 377 (resp. 610).