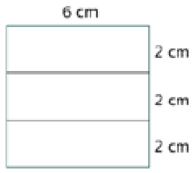
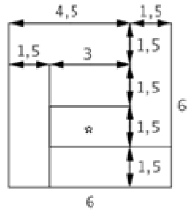
Soluções das Questões – 1º SIMULADO – Nível 2

QUESTÃO 1

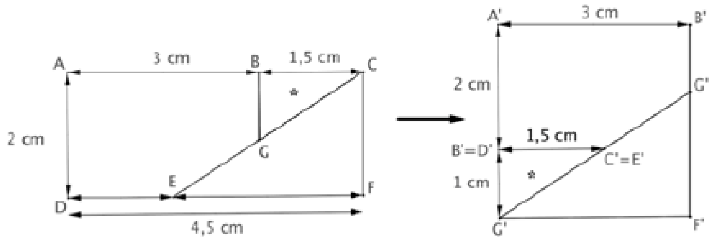
a) Como o quadrado formado com os três retângulos recortados da primeira tira tem área 36 cm^2, seu lado mede 6 cm. Logo o comprimento dos retângulos é 6 cm e sua largura é um terço de seu comprimento, ou seja, 2 cm.



b) Como no item anterior, o lado do quadrado formado com os seis retângulos recortados na segunda tira mede 6 cm. Como todos os retângulos tem a mesma largura, a observação da figura mostra que essa largura é um quarto da medida do lado, isto é, 1,5 cm. As medidas dos outros retângulos são então determinadas imediatamente, como indicado. Em particular, as dimensões do retângulo destacado são 3 cm e 1,5 cm; logo seu perímetro é $1,5 + 1,5 + 3 + 3 = 9$ cm e sua área é $1,5 \times 3 = 4,5$ cm^2.



c) Na figura abaixo mostramos o retângulo e o quadrado; a justificativa para o cálculo das medidas indicadas é feita a seguir. Observamos que na figura à direita marcamos os pontos correspondentes da figura à esquerda com as mesmas letras; por exemplo, o segmento AB à esquerda é o segmento $A'B'$ à direita.



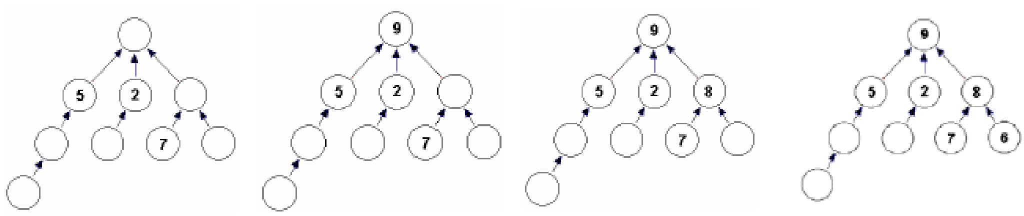
A área do retângulo é $2 \times 4,5 = 9$ cm^2, que é também a área do quadrado; logo o lado do quadrado mede 3 cm. Desse modo, os segmentos $A'B'$ e $B'F'$ medem 3 cm e vemos que AB também mede 3 cm. Como o lado do retângulo mede 4,5 cm, segue que BC mede $4,5 - 3 = 1,5$ cm, que é então a medida de $B'C'$. Finalmente, a medida de $A'B$ é a mesma que a de AD, que é 2 cm; logo a medida de $B'C'$ é $3 - 2 = 1$ cm. Assim obtemos as medidas $BG = 1$ cm e $BC = 1,5$ cm dos catetos do triângulo retângulo BCG, cuja área é então $\dfrac{1 \times 1,5}{2} = 0,75$ cm^2.

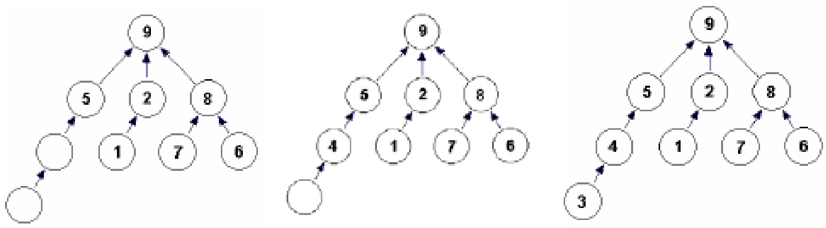
QUESTÃO 2

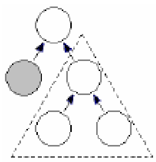
a) Só existe uma maneira de preencher o diagrama, como mostramos a seguir.

- O número 9 não pode ficar abaixo de nenhum número, logo deve ficar no topo.
- Acima do número 7 só podemos colocar o 9 e 8. Como o 9 já está no topo, o 8 ficará acima do 7.
- O número 6 não pode ficar abaixo do 5 nem do 2, logo ficará abaixo do 8 , ao lado do 7.
- O número 1 é o único que pode ficar abaixo do 2.
- Os números 3 e 4 devem ficar abaixo do 5, com o 3 debaixo do 4.

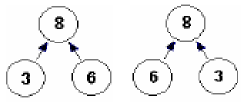
A seqüência de figuras a seguir ilustra as etapas deste raciocínio.







b) *1ª solução*: Primeiro vamos examinar o diagrama menor de três bolinhas marcadas pelo triângulo pontilhado, à esquerda. Para que ele fique bem preenchido com quaisquer três números positivos distintos, o maior número deve ficar no topo e os outros dois poderão ser colocados nos dois círculos de baixo de 2 maneiras diferentes. Por exemplo, se os números forem 3, 6 e 8, podemos dispô-los das 2 maneiras ilustradas à direita.



Para que o diagrama completo do problema fique bem preenchido com os números de 1 a 5, o 5 deve ficar no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 4. As três casas restantes, marcadas com o triângulo pontilhado, formam o diagrama analisado acima e poderão então ser preenchidas de 2 maneiras, com os três números restantes. Resumindo, podemos preencher o diagrama do seguinte modo:

- preenchemos o círculo do topo com o 5: 1 possibilidade;
- preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3 ou 4 : 4 possibilidades;
- preenchemos as três casas que faltam com os três algarismos restantes: 2 possibilidades.

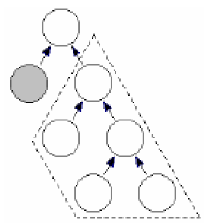
Logo o diagrama pode ser preenchido de $1 \times 4 \times 2 = 8$ maneiras diferentes. Notamos que este raciocínio se aplica para quaisquer cinco números positivos distintos. Isto será importante na resolução do próximo item.

2ª solução: Notamos primeiro que o 5 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 4 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 5, e então

- se o 4 ocupar a bolinha sombreada, o 3 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 5, e o 1 e o 2 podem ser colocados de duas maneiras diferentes nas duas bolinhas que sobram; temos duas possibilidades neste caso;
- se o 4 ocupar a outra bolinha abaixo do 5, a casa sombreada pode ser ocupada por qualquer dos números de 1 a 3, e os outros dois números podem ser colocados nas duas últimas bolinhas vazias; neste caso temos $3 \times 2 = 6$ possibilidades.

Deste modo, o número de maneiras de preencher o diagrama é $2 + 6 = 8$.

c) *1ª solução*: Para que o diagrama fique bem preenchido com os números de 1 a 7, temos que colocar o 7 no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 6. A parte circundada pela linha pontilhada foi analisada no item (b) e pode ser preenchida com os 5 números restantes de 8 formas diferentes. Ou seja, podemos preencher o diagrama como segue:



- preenchemos o círculo do topo com o 7**:** 1 possibilidade;
- preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3 , 4, 5 ou 6**:** 6 possibilidades;
- preenchemos a parte circundada com os algarismos restantes: 8 possibilidades.

Logo o diagrama pode ser preenchido de $1 \times 6 \times 8 = 48$ maneiras diferentes.

2ª solução: Notamos primeiro que o 7 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 6 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 7, e então

- se o 6 ocupar a bolinha sombreada, os números de 1 a 5 devem ocupar as casas circundadas com a linha pontilhada. De acordo com o item (b), isto pode ser feito de 8 maneiras distintas.
- se o 6 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 7, podemos colocar qualquer número de 1 a 5 na casa sombreada e distribuir os números restantes pelas quatro bolinhas ainda vazias, o que pode ser feito de 8 maneiras diferentes, de acordo com o item (b). Aqui temos $5 \times 8 = 40$ possibilidades.

Logo o diagrama pode ser preenchido de $8 + 40 = 48$ maneiras diferentes.

QUESTÃO 3

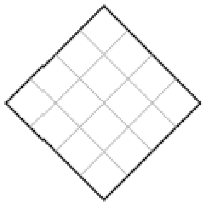
(a) Os divisores de 57 são 1, 3, 19, e 57, donde seus afilhados são 1, 3, 9 e 7.

(b) O exemplo mais simples é 49, cujos afilhados são 1, 7 e 9.

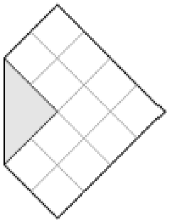
(c) Se um número tem um divisor terminado em 0 então este número é múltiplo de 10. Logo ele é múltiplo de 2 e de 5, e portanto 2 e 5 são seus afilhados.

(d) Seja *N* um número que tem 0 e 9 como afilhados. Pelo item anterior, 2 é afilhado de *N*, logo *N* é par. Como 9 é afilhado de *N*, algum número ímpar terminado em 9 é divisor de *N*. Portanto, *N* é divisível pelo produto de 2 por esse número, ou seja, *N* é divisível por um número terminado em 8. Logo, 8 é afilhado de *N*.

QUESTÃO 4

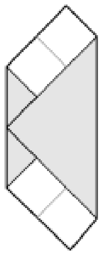


O quadrado original tem área de 16 cm^2; vamos dividi-lo em 16 quadradinhos de área 1 para proceder à solução.

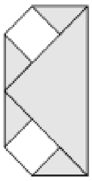


a) *1ª solução:* A primeira dobra deixa como parte não pintada uma região equivalente a 12 quadradinhos unitários. Portanto, a área da região não pintada da figura I é 12 cm^2.

2ª solução: O triângulo cinzento da figura tem área igual a $\frac{1}{8}$ da área do quadrado. A área da região não pintada é então $1-\frac{2}{8}=\frac{3}{4}$ da área do quadrado, ou seja, $\frac{3}{4}\times 16=12\ \text{cm}^2$.



b) A segunda dobra deixa como partes não pintadas dois retângulos iguais, cada um deles composto por dois quadradinhos unitários. Portanto, a área da região não pintada na figura II é $2+2=4\,\text{cm}^2$.



c) As duas últimas dobras horizontais deixam em branco apenas dois quadradinhos unitários. Portanto, a área da região não pintada na figura III é igual a 1 + 1 = 2 cm^2.

QUESTÃO 5

a) No tabuleiro dado aparecem somas ímpares na primeira e segunda linhas, primeira e segunda colunas e na diagonal principal. Desse modo, a nota desse tabuleiro é 5.

b) Abaixo temos 4 tabuleiros com nota 8

1	1	1
1	1	1
1	1	1

1	0	0
0	1	0
0	0	1

0	0	1
0	1	0
1	0	0

0	1	0
1	1	1
0	1	0

É possível mostrar que estes são os únicos tabuleiros com nota 8; deixamos isso como exercício.

c) Ao trocar o número de um dos cantos do tabuleiro, soma-se 1 (caso a troca tenha sido de 0 para 1) ou subtrai-se 1 (caso a troca tenha sido de 1 para 0) aos totais de da linha, da coluna e da diagonal que se encontram nesse canto. Assim, das oito somas (três linhas, três colunas e duas diagonais), três trocam de paridade e as outras não mudam. Observamos agora que:

- se essas três somas são ímpares, após a troca a nota diminuirá de 3;
- se duas dessas somas são pares e uma é ímpar, após a troca a nota aumentará de 1;
- se duas dessas somas são ímpares e uma é par, após a troca a nota diminuirá de 1;
- se essas três somas são pares, após a troca a nota aumentará de 3.

Em qualquer caso, vemos que se a nota original do tabuleiro é par (ou ímpar), ela se tornará ímpar (ou par), pois aumentará ou diminuirá de 1 ou 3.

d) Para preencher todas as casas de um tabuleiro, exceto (por exemplo) a do canto superior direito, temos $2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=2^8=256$ possibilidades. O item anterior mostra que, uma vez essas casas preenchidas, há apenas uma maneira de preencher a casa do canto superior direito de modo que a nota desse tabuleiro seja ímpar, e concluímos que o número de tabuleiros de nota ímpar é 256.

Alternativamente, podemos concluir do item anterior que se um tabuleiro tem nota par (ou ímpar), ao trocar o algarismo da casa do canto superior direito teremos um tabuleiro de nota ímpar (ou par). Isso mostra que a cada tabuleiro de nota par corresponde um de nota ímpar e vice-versa, ou seja, o número de tabuleiros de nota ímpar (ou par) é a metade do número total de tabuleiros, que é $\frac{2^9}{2}=2^8$.

QUESTÃO 6

A) A área da folha era igual a soma das áreas dos nove quadrados, que é

$$1^2+4^2+7^2+8^2+9^2+10^2+14^2+15^2+18^2=1056\ \text{cm}^2$$

B) Sejam a e b as dimensões da folha, onde supomos $a\le b$. Como a área de um retângulo é o produto de suas dimensões, temos $ab=1056$. Além disso, como as medidas dos lados dos quadrados em que a folha foi cortada são números inteiros, segue que a e b devem ser números inteiros. Observamos, finalmente, que a e b devem ser maiores ou iguais a 18, pois um dos quadrados em que a folha foi cortada tem lado com esta medida.

Como a e b são divisores de 1056, a fatoração em fatores primos $1056=2^5\times3\times11$ nos mostra que a e b são da forma $2^x\times3^y\times11^z$, onde x,y e z são inteiros tais que $0\le x\le5, 0\le y\le1$ e $0\le z\le1$. Lembrando que $ab=1056$ e que a e b são maiores que 18, obtemos os seguintes possibilidades:

a	***b***
$2\times11=22$	$2^4\times3=48$
$2^3\times3=24$	$2^2\times11=44$
$2^5=32$	$3\times11=33$

Temos agora que decidir quais destas possibiliidades podem ocorrer como medidas da folha. Como o maior quadrado tem lado 18, que é menor que 22, 24 e 32, vemos que nenhum quadrado pode encostar nos dois lados de comprimento b da folha. Isto quer dizer que b pode ser expresso de duas maneiras como uma soma na qual as parcelas são medidas dos lados dos quadrados, sendo que (i) não há parcelas repetidas em nenhuma das duas expressões e (ii) não há parcelas comuns às duas expressões.

Este argumento mostra que $2b\le1+4+7+8+9+10+14+15+18$, ou seja, $2b\le86$. Logo $b\le43$ e a única possibilidade é $b=33$. Segue que as dimensões da folha eram $a=32$ e $b=33$.

Existem outras maneiras de eliminar os pares (22,48) e (24,44), usando o argumento acima e mostrando, por exemplo, que não existem duas maneiras de escrever 22 e 24 como soma dos lados dos quadrados de duas maneiras com parcelas distintas e sem parcelas comuns.

Esta solução depende do fato de que, em qualquer decomposição de um retângulo em quadrados, os lados dos quadrados são necessariamente paralelos a um dos lados do retângulo. Um argumento intuitivo para demonstrar este fato consiste em selecionar um vértice do retângulo e observar que o quadrado ao qual este vértice pertence tem seus lados apoiados sobre os lados do retângulo. Qualquer quadrado que toca este primeiro quadrado (mesmo que em apenas um vértice) tem seus lados necessariamente paralelos aos lados do retângulo, pois caso contrário teríamos ângulos diferentes de 90° ou 180° na decomposição, e estes ângulos não podem ser preenchidos com quadrados.

B) A única possibilidade (a menos de rotações e simetrias) é mostrada abaixo: