Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA – N3 – ciclo 1

**ENUNCIADOS: três questões para serem resolvidas em casa com discussão posterior**

**Tarefa de casa 1 (Prova OBMEP 2005 – 2a Fase – N3 – Questão 2)**

A sequência é formada a partir do numero somando-se alternadamente ou ao termo anterior, isto é: o primeiro termo é , o segundo é mais o primeiro, o terceiro é mais o segundo, o quarto é mais o terceiro, o quinto é mais o quarto e assim sucessivamente.

a) Escreva os primeiros termos desta sequência.

b) Qual é o termo desta seqüência?

c) Algum termo desta sequência é igual a ? Por quê?

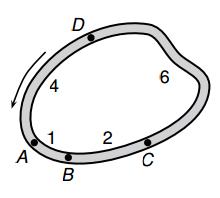
**Tarefa de casa 2** **(Prova OBMEP 2006 – 2a Fase – N3 – Questão 2)**

A figura representa o traçado de uma pista de corrida. Os postos A, B, C e D são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha. Por exemplo, uma corrida de 17 km pode ser realizada com partida em D e chegada em A.

a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?

b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são esses postos?

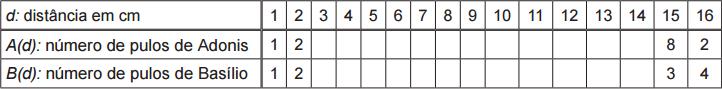
c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.



**Tarefa de casa 3** **(Prova OBMEP 2013 – 2a Fase – N3 – Questão 6)**

Dois grilos, Adonis e Basílio, pulam sempre para a frente; Adonis só dá pulos de cm ou cm e Basílio só dá pulos de cm ou cm. Eles percorrem qualquer distância com o menor número de pulos possível. Por exemplo, Adonis percorre cm com apenas dois pulos de cm cada, enquanto Basílio precisa de quatro pulos, sendo dois de cm e outros dois de cm. Por outro lado, para percorrer cm, Adonis precisa de oito pulos, sendo um de cm e sete de cm, enquanto Basílio precisa de apenas três pulos, sendo dois de cm e um de cm. Indicando por e , respectivamente, o número de pulos que Adonis e Basílio dão para percorrer centímetros, temos , , e .

a) Complete a tabela abaixo:



b) Encontre um número entre e tal que (isto é, encontre uma distância entre cm e cm tal que, para percorrê-la, Basílio dá menos pulos do que Adonis).

c) Encontre o maior número tal que .

Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA – N3 – ciclo 1

**Avaliação: duas questões para serem entregues na próxima aula**

**Questão 1**

Seja um número inteiro tal que deixa resto na divisão por . Explique por que também deixa resto na divisão por .

**Questão 2**

Tenho balas de coco e balas de chocolate. Quero formar saquinhos de balas, sem misturar sabores e sem que sobrem balas. Todos os saquinhos devem ter a mesma quantidade de balas, que deve ser a maior possível. Quantas balas devo colocar em cada saquinho e quantos saquinhos de cada tipo de bala devo formar?

Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA – N3 – ciclo 1

**SOLUÇÕES e COMENTÁRIOS**

**Solução da tarefa de casa 1**<http://www.obmep.org.br/provas_static/sf2n3-2005.pdf>

a) Seguindo a lei de formação da sequência, os primeiros termos são e . Para os itens b) e c), observamos que a sequência dada pode ser decomposta em duas sequências, como segue:

(i) a sequência dos termos de ordem ímpar: Esta sequência consiste dos múltiplos de ; seu termo geral é para .

(ii) a sequência dos termos de ordem par: . Esta sequência consiste dos múltiplos de somados com ; seu termo geral é para .

b) Como é par, vemos que o termo da sequência original é o termo da sequência . Este termo corresponde a , uma vez que o primeiro termo de corresponde a . Logo, o termo procurado é .

c) Temos que . Logo, não pode ser escrito nem na forma nem na forma para algum , e, portanto, não é um termo da sequência. Outra maneira de resolver este item é notar que as soluções das equações e não são números naturais.

**Solução da tarefa de casa 2**<http://www.obmep.org.br/provas_static/sf2n3-2006.pdf>

a).Uma volta completa em torno da pista tem a extensão de km. Por isso, para percorrer km, precisamos dar uma volta completa e percorrer mais km. A única forma de percorrer km, respeitando-se o sentido da corrida, é começando em A e terminando em B. Portanto, a corrida deve começar em A, dar uma volta completa e terminar em B.

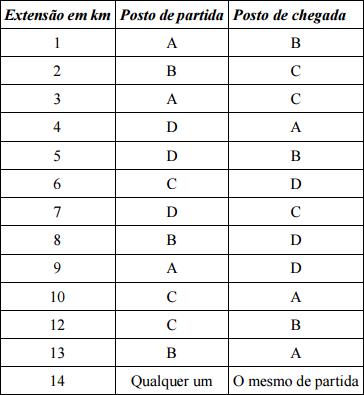
b) Como , uma corrida de km corresponde a dar voltas completas na pista e percorrer mais km. A única forma de percorrer km, respeitando-se o sentido da corrida, é começando em A e terminando em D. Portanto, a corrida deve começar em A, dar voltas completas e terminar em D.

c) Como sugerido nos itens acima, a solução do problema está baseada na ideia de dar tantas voltas completas sem exceder o comprimento da corrida e depois localizar estações convenientes para percorrer “o que falta”. Do ponto de vista matemático, o que acabamos de falar é a expressão do algoritmo da divisão euclidiana de números inteiros, no caso com divisor igual a . Em outras palavras, temos o diagrama habitualmente utilizado na divisão euclidiana:



que representa a expressão dividendo divisor resto, sendo o resto um número natural menor do que . Logo, o resto só pode ser um dos números ou .

Inicialmente, vejamos como podemos realizar corridas com de km até km. Isto é feito por inspeção e o resultado está na tabela abaixo:



A partir dessa tabela, podemos concluir que é possível realizar corridas cuja extensão é qualquer número inteiro de quilômetros maior do que . Para isso, basta ver que temos duas possibilidades:

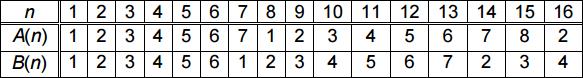
*1ª possibilidade* – a extensão é múltipla de 13: nesse caso, escolhemos um posto qualquer e a corrida começa e termina nesse posto, dando um número inteiro de voltas completas na pista. Por exemplo, se a extensão da corrida é km, basta dar 16 voltas completas na pista.

*2ª possibilidade* – a extensão não é múltipla de 13: nesse caso, o resto da divisão da extensão da corrida por é um dos números . Para cada um desses restos, a tabela acima fornece o posto de partida e o de chegada da corrida. Vejamos alguns casos:

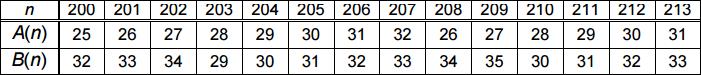
* se o resto é , iniciamos a corrida no posto D e terminamos em B após um certo número de voltas completas na pista. Por exemplo, se a corrida tem km, ela deve começar em D, dar voltas completas até retornar a D e percorrer uma vez o trecho de D até B.
* se o resto é , iniciamos a corrida no posto C e terminamos em B após um certo número de voltas completas na pista. Por exemplo, se a corrida tem km, ela deve começar em C, dar voltas completas até retornar a C e percorrer uma vez o trecho de C até B.

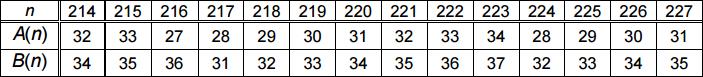
**Solução da tarefa de casa 3**<http://www.obmep.org.br/provas_static/sf2n3-2013.pdf>

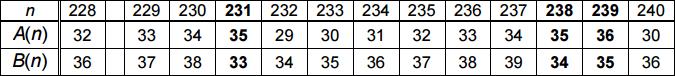
a) Seja a distância a ser percorrida por Adonis e Basílio. O algoritmo da divisão de Euclides nos permite escrever , onde e . Segue que e . Por exemplo, , donde e . O restante da tabela pode ser preenchido analogamente:



b) Para achar um desses números, basta fazer uma tabela como a do item anterior para valores de entre e .

****

****

****

Essa tabela mostra que e são os valores de entre e tais que . Observamos que a feitura dessa tabela não é tão trabalhosa como parece, pois o padrão dos valores de e é claro. Por exemplo, basta calcular para os múltiplos de e a linha correspondente a é preenchida como segue:

****

Observação análoga vale para a linha correspondente a .

c) Das expressões , temos e . Desse modo, se escreve como . Simplificando essa expressão, chegamos a . O maior valor possível para é obtido colocando e , ou seja, o número procurado é . Fica como exercício mostrar que para .

**Solução da Questão 1 (resolvida em sala de aula)**

Como deixa resto na divisão por , então existe um inteiro tal que e, logo, . Como , então e, logo, o resto da divisão de por é igual a .

**Critérios de correção da Questão 1** (resolvida em sala de aula)  
Esta questão vale 5 pontos, distribuídos da seguinte maneira:

* Escreveu : pontos;
* Escreveu que : pontos;
* Concluiu que o resto da divisão de por é igual a : ponto.

**Solução da Questão 2 (resolvida em sala de aula)**

Sejam e as quantidades de saquinhos de balas de coco e de balas de chocolate, respectivamente. Seja a quantidade de balas em cada saquinho. Então, deve-se ter e . Assim, é divisor comum de e . Como deve ter o maior valor possível, então deve ser igual ao mdc de e , que é igual a . Assim, deve-se colocar 12 balas em cada saquinho e deve-se formar saquinhos de balas de coco e saquinhos de balas de chocolate.

**Critérios de correção da Questão 2** (resolvida em sala de aula)  
Esta questão vale 5 pontos, distribuídos da seguinte maneira:

* Concluiu que a quantidade de balas em cada saquinho é divisor comum de e : pontos;
* Concluiu que a quantidade de balas em cada saquinho é o mdc de e : pontos;
* Achou corretamente o mdc de e : 1,5 pontos;
* Achou corretamente a quantidade de balas em cada saquinho e a quantidade de saquinhos de cada tipo de bala: pontos.