Capítulo 3

Os Inteiros e suas Propriedades

3.1 Os Inteiros

Dados dois números naturais a e b, até o momento, o número $b - a$ só foi definido quando $b \geq a$. Como remediar esta situação? O jeito que os matemáticos encontraram para que seja sempre definido o número $b - a$ foi o de ampliar o conjunto dos números naturais formando um novo conjunto $\mathbb{Z}$ chamado de *conjunto dos números inteiros*, cujos elementos são dados ordenadamente como segue:

$$\cdots \to -3 \to -2 \to -1 \to 0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \cdots$$

Os números à esquerda do zero são chamados de *números negativos* e os à direita são chamados de *números positivos*. Os pares de números 1 e -1, 2 e -2, 3 e -3 etc., são chamados de *números simétricos*. O elemento 0, que não é nem positivo, nem negativo, é o seu próprio simétrico.

Em $\mathbb{Z}$ temos uma relação de ordem que estende a relação de ordem de $\mathbb{N}$, onde declaramos $a < b$ quando a se encontra à esquerda de b. Esta relação continua transitiva e total (i.e., satisfazendo à tricotomia). Os intervalos em $\mathbb{Z}$ são definidos de modo análogo aos intervalos de $\mathbb{N}$.

Representando por $-a$ o simétrico de a, seja ele positivo, negativo ou nulo, temos sempre que

$$-(-a) = a.$$

No conjunto $\mathbb{Z}$, temos definida a adição como segue:

Para todo número inteiro a, definimos $a+b$ como sendo o número obtido pelo deslocamento de a para a direita de b posições, se $b \geq 0$ ou de $-b$ posições para a esquerda se $b < 0$. A adição no conjunto $\mathbb{Z}$ continua tendo as propriedades comutativa e associativa e é compatível com a relação de ordem.

Definimos a diferença $b - a$ como sendo o número obtido deslocando b para a esquerda a posições, se $a > 0$; e deslocando b para a direita $-a$ posições, se $a < 0$. Isto define uma operação em $\mathbb{Z}$, sem restrições, chamada de *subtração*. Assim, temos que a subtração é a operação inversa da adição e

$$b - a = b + (-a).$$