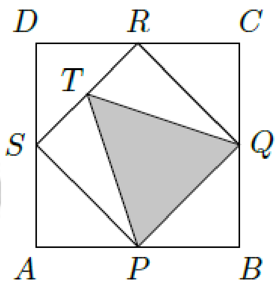
Lista de Exercícios – Nível 3 – Ciclo 3 – Marcos Assumpção - CEPAC

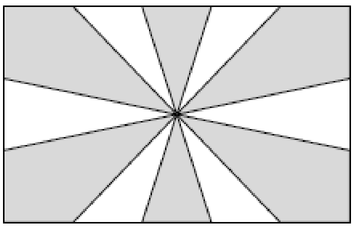
Encontro 1:

1) (OBMEP 2009 - N1Q10F1) Na figura, o quadrado ABCD tem área 40 cm^2. Os pontos P, Q, R e S são pontos médios dos lados do quadrado e T é o ponto médio do segmento RS.



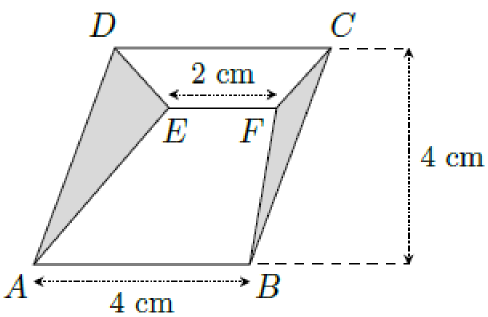
Qual é a área do triângulo PQT?

2) (Banco de Questões 2011 - N1Q11 - Pg.15) O Tio Mané é torcedor doente do Coco da Selva Futebol Clube e resolveu fazer uma bandeira para apoiar seu time no jogo contra o Desportivo Quixajuba. Para isto, comprou um tecido branco retangular com 100 cm de largura e 60 cm de altura. Dividiu dois de seus lados em cinco partes iguais e os outros dois em três partes iguais, marcou o centro do retângulo e pintou o tecido da forma indicada na figura.



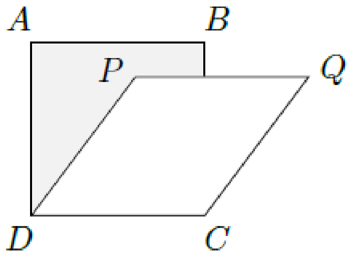
Qual é a área do tecido que Tio Mané pintou?

3) (OBMEP 2009 - N2Q18F1) Na figura, ABCD é um paralelogramo e o segmento EF é paralelo a AB.



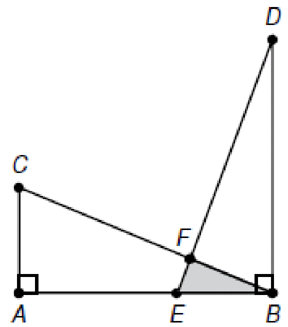
Qual é a soma das áreas dos triângulos sombreados?

4) Na figura plana a seguir, sobre o quadrado cinza ABCD com 25 cm^2 de área foi desenhado um losango branco PQCD com 20 cm^2 de área.



Determine a área cinza do quadrado que não ficou encoberta pelo losango.

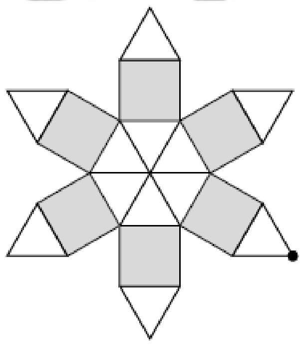
5) (OBMEP 2006 - N3Q3F2) Na figura, os triângulos ABC e BDE são congruentes e os ângulos BAC e BDE são retos.



(a) Ache a razão entre a área do triângulo BDF e a área do quadrilátero $AEFC$.

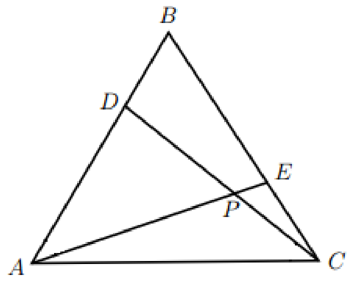
(b) Determine a medida do ângulo BFE.

6) (Banco de Questões 2011- N1Q12 – Pg.15) As flores de Geometrix têm formatos muito interessantes. Algumas delas possuem a forma mostrada na figura, na qual há seis quadrados e doze triângulos equiláteros. Uma abelha pousou no ponto destacado e andou sobre a borda da flor no sentido horário até voltar ao ponto inicial.



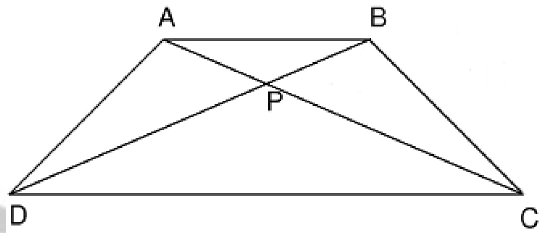
Sabendo que a região cinza tem 24 cm2 de área, qual é a distância percorrida pela abelha?

7) (Banco de Questões 2013 - N3Q23) Nos lados AB e BC de um triângulo equilátero ABC, fixam-se dois pontos D e E, respectivamente, de modo que $AD = BE$.



Se os segmentos AE e CD se cortam no ponto P, determine o ângulo $\widehat{APC}$.

8) (Banco de Questões 2008 – N2L6Q5) Na figura, o trapézio $ABCD$ é isósceles, AB é paralelo a CD e as diagonais AC e BD cortam-se no ponto P.

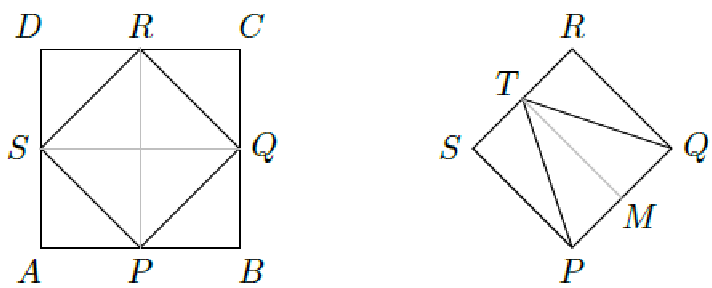


Se as áreas dos triângulos ΔABP e ΔPCD são $4\ cm^2$ e $9\ cm^2$, respectivamente, qual é a área do triângulo ΔPBC?

Soluções:

1) *Exemplo 2, página 99, Apostila do PIC "Encontros de Geometria".*

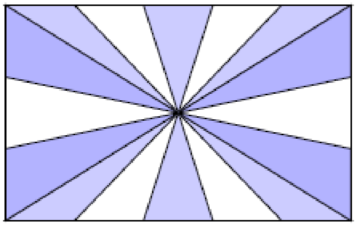
Traçando os segmentos QS e PR, vemos que o quadrado $ABCD$ é composto de oito triângulos retângulos iguais e que o quadrado $PQRS$ é formado por quatro destes triângulos. Portanto, a área do quadrado $PQRS$ é metade da área do quadrado $ABCD$, ou seja, $\frac{40}{2} = 20 \text{ cm}^2$.



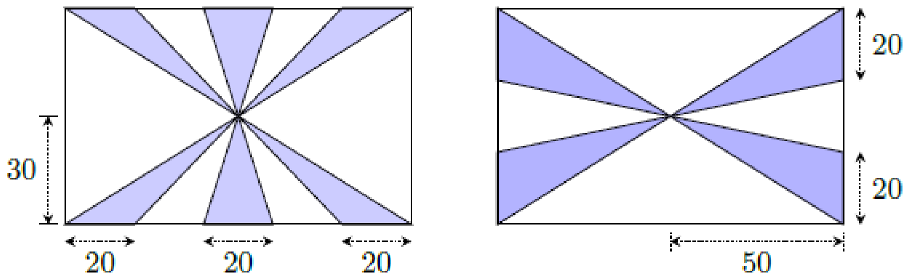
Traçando agora o segmento TM, sendo M o ponto médio de PQ, vemos que o quadrado $PQRS$ é composto de quatro triângulos retângulos iguais e o triângulo PQT é formado por dois destes triângulos. Logo, a área do triângulo PQT é metade da área do quadrado $PQRS$, ou seja, $\frac{20}{2} = 10 \text{ cm}^2$.

2) *Exemplo 5, página 102, Apostila do PIC "Encontros de Geometria".*

As diagonais do retângulo dividem as regiões pintadas do tecido em dois tipos de triângulos.



Todos os seis triângulos da figura seguinte, à esquerda, possuem base de 20 cm e altura de 30 cm. Portanto, eles possuem mesma área igual a $\frac{20 \cdot 30}{2} = 300 \text{ cm}^2$. Todos os quatro triângulos da figura seguinte, à direita, possuem a mesma área, pois eles têm base de 20 cm e altura de 50 cm. Logo cada um deles tem área igual a $\frac{20 \cdot 50}{2} = 500 \text{ cm}^2$.

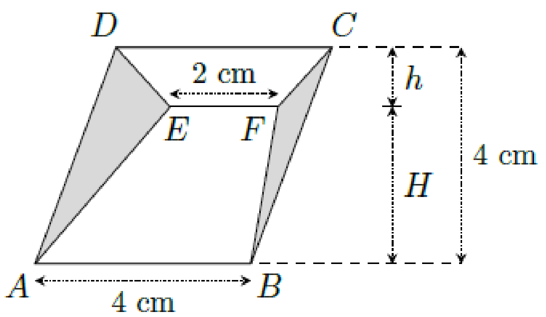


Portanto, a área total pintada no tecido é igual a $6 \cdot 300 + 4 \cdot 500 = 3800 \text{ cm}^2$.

3) *Exemplo 5, página 118, Apostila do PIC "Encontros de Geometria".*

Como no problema anterior, vamos subtrair de uma área maior, áreas de regiões que não fazem parte da figura que pretendemos calcular a área. Aqui vamos subtrair da área do paralelogramo $ABCD$ as áreas dos trapézios brancos $ABFE$ e $CDEF$.

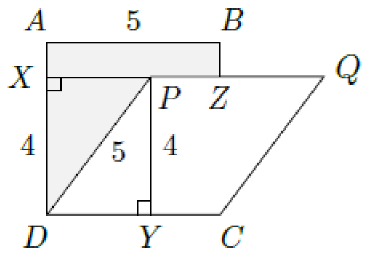
- O paralelogramo $ABCD$ tem base 4 cm e tem altura 4 cm. Logo sua área é igual a $4 \cdot 4 = 16$ cm^2.
- O trapézio $ABFE$ tem base maior 4 cm, tem base menor 2 cm e tem uma altura H. A área deste trapézio é $\dfrac{(2+4)H}{2} = 3H$.
- O trapézio $CDEF$ tem base maior 4 cm, tem base menor 2 cm e tem uma altura h. A área deste trapézio é $\dfrac{(2+4)h}{2} = 3h$.



Daí a soma das áreas dos triângulos sombreados é igual a $16 - 3H - 3h = 16 - 3(H + h)$. Observe agora que a soma das alturas $H + h$ dos trapézios é igual a altura 4 do paralelogramo. Logo, $H + h = 4$ e, portanto, a soma das áreas dos triângulos sombreados é igual a $16 - 3(H + h) = 16 - 3 \cdot 4 = 16 - 12 = 4$ cm^2.

4) *Exemplo 4, página 129, Apostila do PIC "Encontros de Geometria".*

Prolongue o segmento PQ até ele intersectar o segmento AD no ponto X e seja Y o ponto do segmento DC tal que PY é uma altura do losango $PQCD$. Seja Z o ponto de interseção dos segmentos PQ e BC. Observe que a figura sombreada é formada pelo retângulo $ABZX$ e pelo triângulo retângulo DPX. Para calcular a área desta figura vamos somar as áreas deste retângulo e deste triângulo retângulo.



O losango tem base $\overline{DC} = 5$ cm, tem altura PY, e sua área é igual a 20 cm^2. Como a área de um losango é igual ao produto da base pela altura, temos que $\overline{DC} \times \overline{PY} = 20$. Daí $5 \times \overline{PY} = 20$ donde $\overline{PY} = 4$ cm. Como $\overline{XD} = \overline{PY} = 4$ cm, vemos que $\overline{XA} = 5 - 4 = 1$ cm.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo DPX de cateto $\overline{XD} = 4$ cm e de hipotenusa $\overline{DP} = 5$ cm, concluímos que $\overline{XP} = 3$ cm.

Daí o retângulo $ABZX$ tem base $\overline{XZ} = 5$ cm e tem altura $\overline{XA} = 1$ cm. A área desse retângulo é então igual a $5 \times 1 = 5$ cm^2. Já o triângulo retângulo DPX tem base $\overline{XP} = 3$ cm e tem altura $\overline{XD} = 4$ cm. Sua área é então igual a $\dfrac{3 \times 4}{2} = 6$ cm^2. Finalmente, a área desejada da região cinza é igual a $5 + 6 = 11$ cm^2.

5) a) Como os triângulos ABC e BDE são congruentes, temos

$$\text{área de ABC} = \text{área de BDE},$$

donde

$$\begin{aligned} \text{área de AEFC} &= \text{área } \Delta\text{ABC} - \text{área } \Delta\text{BFE} \\ &= \text{área } \Delta\text{BDE} - \text{área } \Delta\text{BFE} \\ &= \text{área } \Delta\text{ BDF}. \end{aligned}$$

Logo área de AEFC = área ΔBDF e a razão pedida é

$$\frac{\text{área } \Delta\text{BDF}}{\text{área de AEFC}} = 1 \;.$$

b) Como os triângulos ABC e BDE são congruentes, temos que $\widehat{DEB} = \widehat{BCA}$, donde

$$\widehat{DEB} + \widehat{ABC} = \widehat{BCA} + \widehat{ABC} = 90°.$$

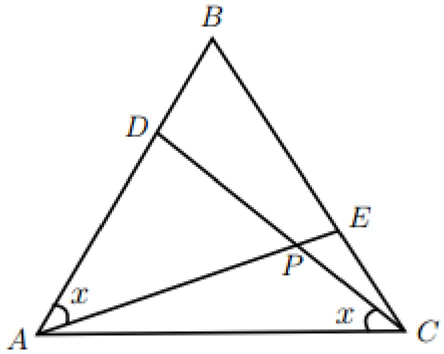
donde

$$\widehat{BFE} = 180º - (\widehat{DEB} + \widehat{ABC}) = 180° - 90° = 90°.$$

6) *Exemplo 1, página 116, Apostila do PIC "Encontros de Geometria".*

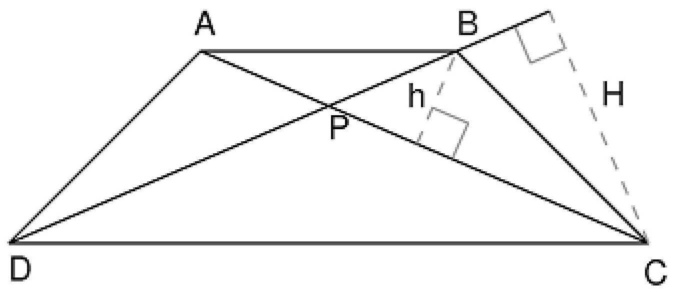
Como a região cinza é formada por seis quadrados, a área de cada um destes quadrados é igual a $24 \div 6 = 4$ cm^2. Como a área de um quadrado de lado ℓ é dada por ℓ^2, vemos que cada um dos quadrados da figura tem 2 cm de lado. Por uma contagem direta vemos que uma volta completa na borda da flor contém $6 \cdot 4 = 24$ segmentos. Logo, para dar uma volta completa na flor, a abelha percorreu uma distância igual a $24 \cdot 2 = 48$ cm.

7) Observe os triângulos DAC e EBA. Sabe-se que $DA = EB$. Além disso, como o triângulo ABC é equilátero, então $AC = BA$. Mais ainda, em um triângulo equilátero todos os ângulos internos medem 60º. Logo $\widehat{DAC} = \widehat{EBA} = 60°$. Isso implica que os triângulos DAC e EBA são congruentes e portanto $\widehat{DCA} = \widehat{BAE}$. Na figura abaixo representamos $\widehat{DCA} = \widehat{BAE} = x$.



Agora note que $\widehat{PAC} = 60° - \widehat{DAP} = 60° - \widehat{PCA}$. Isto é, $\widehat{PAC} + \widehat{PCA} = 60º$. Como a soma dos ângulos interiores do triângulo APC deve ser 180º, temos que $\widehat{PAC} + \widehat{PCA} + \widehat{APC} = 180º$. Concluímos que $\widehat{APC} = 120º$.

8) Seja H a altura dos triângulos ΔDPC e ΔCPB relativa às bases DP e PB, respectivamente.



Logo, $área(\Delta DPC) = \frac{1}{2}H \cdot DP$ e $área(\Delta CPB) = \frac{1}{2}H \cdot PB$,
e portanto

$$\frac{\text{área}(\Delta\text{DPC})}{\text{área}(\Delta\text{CPB})} = \frac{\frac{1}{2}\,\text{H}\cdot\text{DP}}{\frac{1}{2}\,\text{H}\cdot\text{PB}} = \frac{\text{DP}}{\text{PB}}.$$

Da mesma maneira, se h *é* a altura dos triângulos ΔAPB e ΔCPB relativa às bases AP e PC, respectivamente, temos que

$$\frac{\text{área}(\Delta\text{CPB})}{\text{área}(\Delta\text{APB})} = \frac{\frac{1}{2}\,\text{h}\cdot\text{PC}}{\frac{1}{2}\,\text{h}\cdot\text{AP}} = \frac{\text{PC}}{\text{AP}}.$$

Como o trapézio $ABCD$ é isósceles, temos que $AD = BC$ e os ângulos $\widehat{\text{ADC}} = \widehat{\text{BCD}}$.
Daí temos que os triângulos ΔADC e ΔDBC são congruentes, pois têm dois lados e o ângulo entre eles iguais. Consequentemente, $\widehat{PDC} = \widehat{PCD}$ e $\widehat{PAB} = \widehat{PBA}$.
Portanto, $DP = PC$ e $PB = PA$. Logo,

$$\frac{\text{área}(\Delta\text{DPC})}{\text{área}(\Delta\text{CPB})} = \frac{\text{DP}}{\text{PB}} = \frac{\text{PC}}{\text{PA}} = \frac{\text{área}(\Delta\text{CPB})}{\text{área}(\Delta\text{APB})}$$

Logo,

$$[\text{área}(\Delta\text{CPB})]^2 = \text{área}(\Delta\text{APB}) \cdot \text{área}(\Delta\text{DPC}) = 4 \cdot 9 = 36,$$

portanto área(ΔBPC)= 6 cm^2.