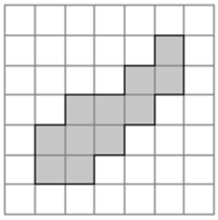
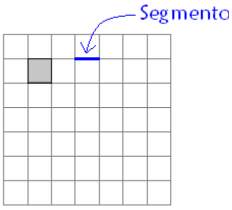
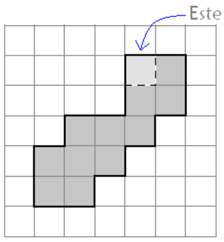
(Questão 1) Qual é a área da figura a seguir, usando como unidade a área de um quadrinho? Qual é o perímetro da figura? Quantos quadrinhos podem ser acrescentados à figura de modo a obter o máximo de área sem alterar o perímetro?

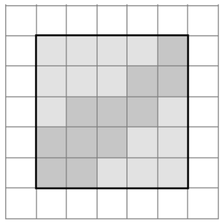




Solução: Contando diretamente os quadrinhos que compõem a região escurecida da figura vemos que ela tem 11 unidades de área. Já o contorno da figura possui 20 segmentos e, portanto seu perímetro é 20 unidades de comprimento. Analisando, agora, a figura logo abaixo:

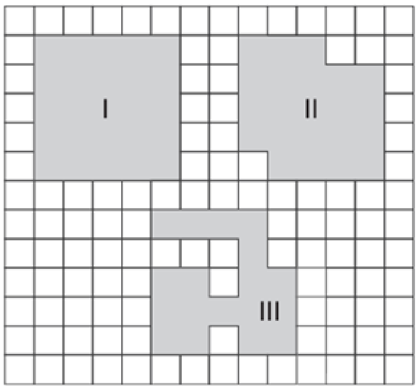


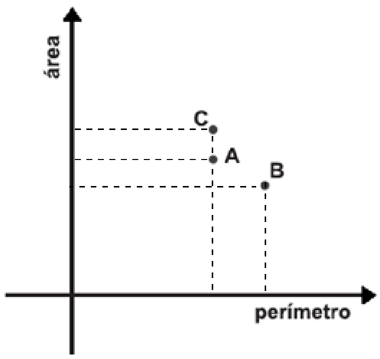
Vemos que se acrescentamos um quadradinho colado na figura, aumentamos a sua área em uma unidade, mas não alteramos o seu perímetro, pois só trocamos de lugar dois segmentos (pontilhados) que já faziam parte do contorno da figura. Podemos ir acrescentando estes quadradinhos até formar um quadrado de lado 5. Portanto, podemos acrescentar mais 14 quadradinhos na figura dada sem alterar o seu perímetro, como está indicado na figura a seguir à direita.



(Questão 2) A figura mostra três polígonos desenhados em uma folha quadriculada. Para cada um desses polígonos foi assinalado, no plano cartesiano à direita, o ponto cujas coordenadas horizontal e vertical são, respectivamente, seu perímetro e sua área. Qual é a correspondência correta entre os polígonos e os pontos?

a) I C, II B, III A
b) I B, II A, III C
c) I A, II C, III B
d) I A, II B, III C
e) I C, II A, III B





<u>Solução</u>: Usando o lado ℓ de um dos quadradinhos do quadriculado como unidade de comprimento, a contagem direta na figura nos dá as áreas e perímetros dos polígonos, conforme a tabela ao lado.

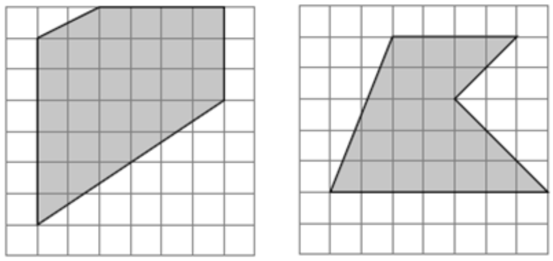
Polígono	Perímetro (em ℓ)	Área (em ℓ^2)
I	20	$5 \times 5 = 25$
II	20	$25 - 3 = 22$
III	30	$25 - 7 = 18$

Deste modo, a correspondência que associa a cada polígono a um par ordenado no plano cartesiano é:

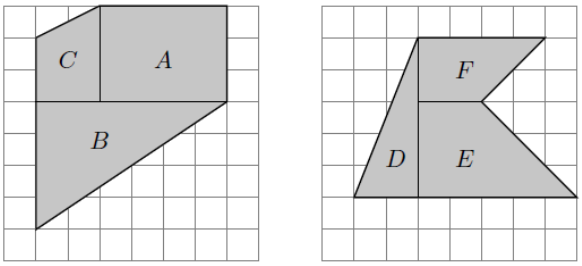
Polígono I→ (20; 25), Polígono II→ (20; 22) e Polígono III→ (30; 18).

Os pontos correspondentes aos polígonos I e II têm a mesma abscissa (perímetro) logo estão na mesma reta vertical no plano cartesiano; como o ponto correspondente a I tem ordenada (área) maior, ele é o que está mais acima. Logo I→ C e II→ A. E desta forma, III→ B.

(Questão 3) Decompondo em figuras geométricas mais simples, calcule a área de cada uma das seguintes figuras desenhadas em uma malha de quadrados de lado 1.



Solução: Na figura a seguir, apresentamos uma possível decomposição das figuras dadas em triângulos, retângulos e trapézios.



A figura da esquerda está decomposta em um retângulo A de lados 3 e 4; um triângulo retângulo B de catetos 6 e 4 e um trapézio C de bases 2 e 3 e de altura 2. Portanto, as áreas são:

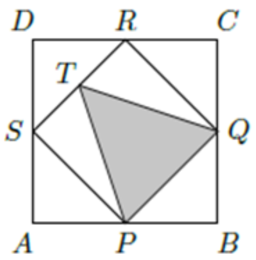
$$\text{área(A)} = 3 \times 4 = 12, \qquad \text{área(B)} = \frac{6 \times 4}{2} = 12 \qquad \text{e} \qquad \text{área(C)} = \frac{(2+3) \times 2}{2} = 5.$$

Deste modo, a área da figura da esquerda é 12 + 12 + 5 = 29.

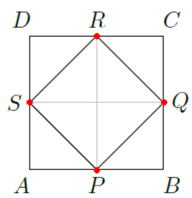
A figura da direita está decomposta em um triângulo retângulo D de catetos 2 e 5; um trapézio E de bases 2 e 5 e de altura 3; e um trapézio F de bases 2 e 4 e de altura 2. As áreas destas figuras são:

$$\text{área(D)} = \frac{2 \times 5}{2} = 5, \qquad \text{área(E)} = \frac{(2+5) \times 3}{2} = 10{,}5\,; \qquad \text{e} \qquad \text{área(F)} = \frac{(2+4) \times 2}{2} = 6.$$

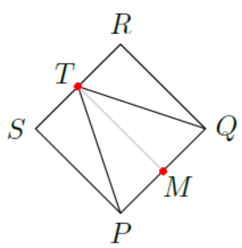
Portanto, a área da figura da direita é igual a 5 + 10,5 + 6 = 21, 5.



(Questão 4) Na figura, o quadrado ABCD tem área 40 cm². Os pontos P, Q, R, S são pontos médios dos lados do quadrado e T é o ponto médio do segmento RS. Qual é a área do triângulo PQT?



Solução: Traçando os segmentos QS e PR, vemos que o quadrado ABCD é composto de oito triângulos retângulos iguais e que o quadrado PQRS é formado por quatro destes triângulos. Portanto, a área do quadrado PQRS é metade da área do quadrado ABCD, ou seja, $\frac{40}{2}$ = 20 cm².



Traçando agora o segmento TM, sendo M o ponto médio de PQ, vemos que o quadrado PQRS é composto de quatro triângulos retângulos iguais e o triângulo PQT é formado por dois destes triângulos. Logo, a área do triângulo PQT é metade da área do quadrado PQRS, ou seja, $\frac{20}{2}$ = 10 cm².

(Questão 5) Miguilim brinca com dois triângulos iguais cujos lados medem 3 cm, 4 cm e 6 cm. Ele forma figuras planas unindo um lado de um triângulo com um lado do outro, sem que um triângulo fique sobre o outro. Abaixo vemos duas das figuras que ele fez.

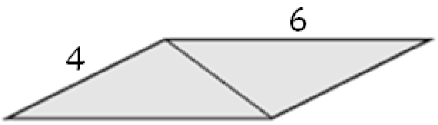


Figura I

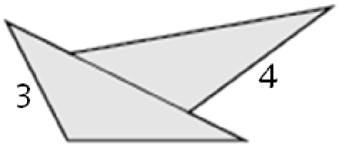


Figura II

a) Quais os comprimentos dos lados que foram unidos nas Figuras I e II?

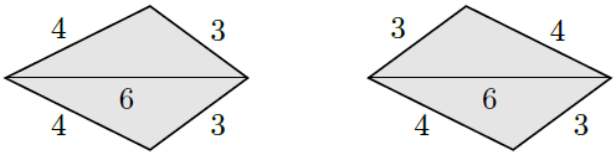
<u>Solução</u>: Na Figura I, verificamos que as medidas de dois lados que não foram unidos são 4 cm e 6 cm. Como os dois lados unidos são do mesmo tamanho, eles não podem medir nem 4 cm nem 6 cm, logo medem 3 cm. Na Figura II, o triângulo que está mais acima tem um lado livre de 4 cm e claramente o lado que foi unido ao triângulo debaixo é menor do que o lado livre não identificado. Portanto, o lado do triângulo superior que foi unido ao debaixo mede 3 cm. No triângulo debaixo, claramente o maior lado foi unido ao lado do triângulo de cima. Este lado mede 6 cm.

b) Calcule os perímetros das Figuras I e II.

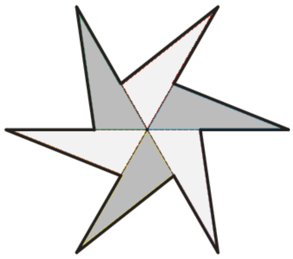
<u>Solução</u>: Os lados de medida 3 cm não fazem parte do perímetro da Figura I. Logo o perímetro da Figura I é igual a $2 \cdot (4 + 6) = 20$ cm. O lado de 3 cm de um triângulo e o pedaço de 3 cm do lado maior do outro triângulo não fazem parte do perímetro da Figura II. Logo, o perímetro da Figura II é igual a $6 + 4 + 3 + 4 + (6 - 3) = 20$ cm.

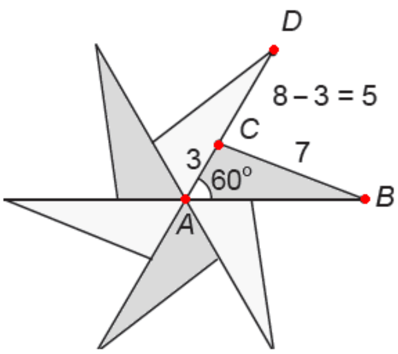
c) Qual o menor perímetro de uma figura que Miguilim pode formar? Desenhe duas figuras que ele pode formar com este perímetro.

<u>Solução</u>: O perímetro de uma figura obtida quando se unem lados dos dois triângulos é igual à soma dos perímetros dos dois triângulos menos duas vezes o comprimento do menor dos lados que foram unidos. Assim, o perímetro da figura é o menor possível quando unirmos os dois lados de 6 cm; neste caso o perímetro é igual a $2 \cdot (3 + 4 + 6) - 2 \cdot 6 = 14$ cm. As duas figuras abaixo têm perímetro mínimo.



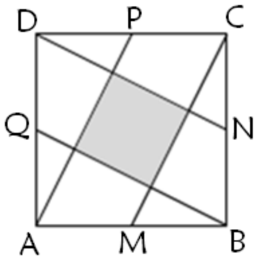
(Questão 6) A figura estrelada foi construída com triângulos de lados 3 cm, 7 cm e 8 cm. Qual é o perímetro da figura?



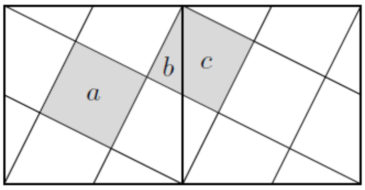


<u>Solução</u>: Observemos, em primeiro lugar, que o lado BC do triângulo, como na figura ao lado, mede 7 cm; já o lado AB, sendo maior que o lado AC, mede 8 cm e o lado AC, sendo o menor, mede 3 cm. Segue, então, que o segmento CD mede $8 - 3 = 5$ cm e o perímetro da figura é:
$6 \times 7 + 6 \times 5 = 72$ cm.

(Questão 7) Na figura a seguir, ABCD é um quadrado de lado 10 e M, N, P e Q são pontos médios dos lados deste quadrado. Qual e a área do quadrado sombreado?



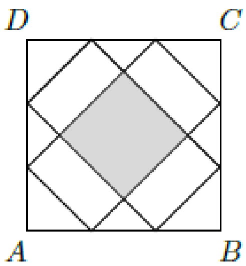
Solução: O quadrado ABCD está dividido em um quadrado ***a***, quatro triângulos retângulos ***b*** e quatro trapézios ***c***. Reproduzindo a figura dada ao lado dela mesma, pode-se concluir que um triângulo retângulo ***b*** e um trapézio ***c*** formam juntos um quadrado ***a***. Isto é, a = b + c.



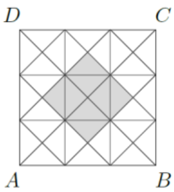
Assim vemos que o quadrado ABCD está dividido em regiões que podem ser reorganizadas para formarem 5 quadrados ***a***. Portanto, a área do quadrado ***a*** é igual a um quinto da área do quadrado ABCD e, portanto, a área do quadrado ***a*** é igual a:

$$\frac{10 \times 10}{5} = 20.$$

(Questão 8) Na figura a seguir, ABCD é um quadrado de lado 18. Sobre cada um dos seus lados estão marcados dois pontos que dividem o lado do quadrado em 3 partes iguais. Traçando alguns segmentos que unem estes pontos, foi obtida a seguinte figura. Qual é a área do quadrado sombreado?

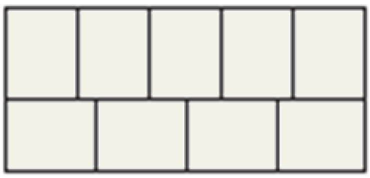


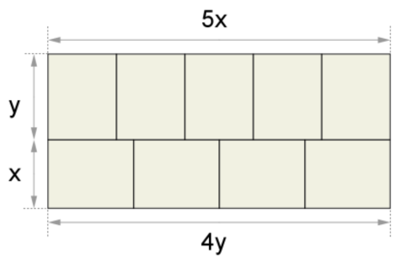
Solução: Desenhando vários segmentos de reta como está indicado na figura a seguir, podemos dividir o quadrado ABCD em 36 triângulos iguais.



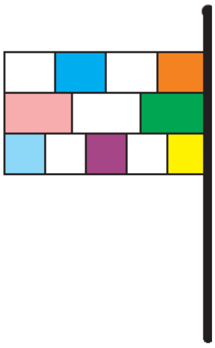
A área de cada um destes triângulos é igual a área do quadrado ABCD dividida por 36, ou seja $\frac{18 \times 18}{36} = 9$. Como o quadrado sombreado é formado por 8 destes triângulos, a sua área é igual a 8 × 9 = 72.

(Questão 9) A figura mostra um retângulo de área 720 cm², formado por nove retângulos menores e iguais. Qual é o perímetro, em centímetros, de um dos retângulos menores?



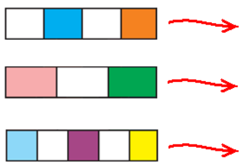


Solução: Sejam x e y, respectivamente, as medidas do lado menor e do lado maior de um dos retângulos menores. As medidas dos dois lados do retângulo maior são então x + y e 5x = 4y; em particular, temos $y = \frac{5}{4}x$. Como a área do retângulo maior é 720 cm², então temos $5x(x+y)=5x\left(x+\frac{5}{4}x\right)=\frac{45}{4}x^2=720$ e, portanto $x^2=64$. Logo x = 8 e y = 10; o perímetro de um dos retângulos menores é então 2·(8 + 10) = 36 cm.



(Questão 10) As três faixas horizontais da bandeira ao lado têm mesmo comprimento, mesma altura e cada faixa é dividida em partes iguais. A área total da bandeira é 900 cm². Qual é a soma das áreas dos retângulos brancos?

Solução: Cada faixa da bandeira tem área igual a 300 cm². As partes brancas da faixa superior têm, portanto, área igual a 150 cm². A parte branca da faixa do meio tem área igual a 100 cm² e as partes brancas da faixa inferior têm área 120 cm².



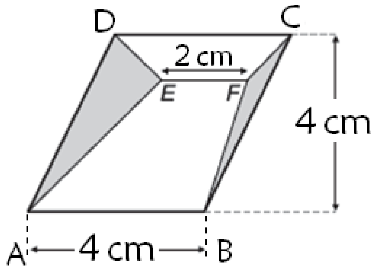
$A_1 = \frac{2}{4} \times 300 = 150\ \text{cm}^2$

$A_2 = \frac{1}{3} \times 300 = 100\ \text{cm}^2$

$A_3 = \frac{2}{5} \times 300 = 120\ \text{cm}^2$

Logo, a soma das áreas dos retângulos brancos é 150 + 100 + 120 = 370 cm². Em outras palavras, se A_1, A_2 e A_3 são as áreas dos retângulos brancos, respectivamente, em cada uma das três faixas, então, a área total de todos os retângulos brancos é $A_1 + A_2 + A_3$ = 150 + 100 + 120 = 370 cm²

(Questão 11) Na figura, ABCD é um paralelogramo e o segmento EF é paralelo a AB. Qual é a soma das áreas dos triângulos sombreados?

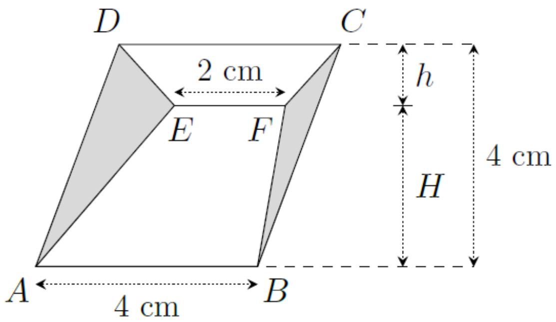


Solução: Vamos subtrair de uma área maior, áreas de regiões que não fazem parte da figura que pretendemos calcular a área. Aqui vamos subtrair da área do paralelogramo ABCD as áreas dos trapézios brancos ABFE e CDEF.

- O paralelogramo ABCD tem base 4 cm e tem altura 4 cm.
Logo sua área é igual a 4 × 4 = 16 cm².

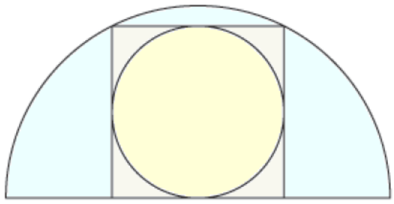
- O trapézio ABFE tem base maior 4 cm, tem base menor 2 cm e tem uma altura H. A área deste trapézio é: $\frac{(2+4)\times H}{2}$ = 3H.

- O trapézio CDEF tem base maior 4 cm, tem base menor 2 cm e tem uma altura h. A área deste trapézio é: $\frac{(2+4)\times h}{2}$ = 3h.



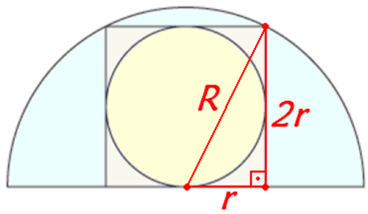
Daí a soma das áreas dos triângulos sombreados é igual a 16 – 3H – 3h = 16 – 3(H + h). Observe agora que a soma das alturas H + h dos trapézios é igual a altura 4 do paralelogramo. Logo, H + h = 4 e, portanto, a soma das áreas dos triângulos sombreados é igual a 16 – 3·(H + h) = 16 – 3·4 = 16 – 12 = 4 cm².

(Questão 12) O quadrado da figura está inscrito no semicírculo e o círculo está inscrito no quadrado. O círculo tem área igual a 10 cm². Qual é a área do semicírculo?



Solução: A princípio devemos saber que a área de um círculo é dado por $A_c = \pi \cdot r^2$ e portanto a área do semicírculo é a metade da área do círculo.

Vamos representar o raio do semicírculo por ***R*** e o raio do círculo por ***r*** conforme a figura abaixo. Podemos também observar em destaque um triângulo retângulo que pelo teorema de Pitágoras:



$$R^2 = r^2 + (2r)^2$$

Como já sabemos que $A_c = \pi r^2 \rightarrow 10 = \pi r^2 \rightarrow r = \sqrt{\frac{10}{\pi}}$ então podemos escrever:

$$R^2 = \left(\sqrt{\frac{10}{\pi}}\right)^2 + \left(2\sqrt{\frac{10}{\pi}}\right)^2 \rightarrow R^2 = \frac{10}{\pi} + \frac{40}{\pi} = \frac{50}{\pi} \rightarrow R = \sqrt{\frac{50}{\pi}}$$

Dessa forma substituindo o valor de ***R*** em: $A_s = \frac{\pi . R^2}{2} = \frac{\cancel{\pi} . \left(\cancel{\sqrt{\frac{50}{\cancel{\pi}}}}\right)^{\cancel{2}}}{2} = \frac{50}{2} = 25$

Portanto a área do semicírculo é: 25 cm²