Encontro 05

RESPOSTA DOS EXERCÍCIOS

I. **Múltiplo de 7** – Inicialmente, observemos que:

$$\begin{aligned} N &= (n+6m)(2n+5m)(3n+4m) \\ &= (n+7m-m)(2n+7m-2m)(3n+7m-3m) \\ &= (n-m+7m)[2(n-m)+7m][3(n-m)+7m] \\ &= (k+7m)(2k+7m)(3k+7m), \end{aligned}$$

onde $k = n - m$.

Afirmamos que se N é múltiplo de 7, então k é múltiplo de 7. De fato, como 7 é primo e divide N, então um dos fatores $k+7m$, $2k+7m$ ou $3k+7m$ é múltiplo de 7. Temos:

(i) Se $k+7m$ é múltiplo de 7, então $\dfrac{k+7m}{7} = \dfrac{k}{7} + m$ é inteiro, logo k é múltiplo de 7. Segue que $2k$ e $3k$ também são múltiplos de 7 e portanto os três fatores $k+7m$, $2k+7m$ e $3k+7m$ são múltiplos de 7. Concluímos que N é múltiplo de 7^3.

(ii) Se $2k+7m$ é múltiplo de 7, então $\dfrac{2k+7m}{7} = \dfrac{2k}{7} + m$ é inteiro, logo $2k$ é múltiplo de 7. Como 2 e 7 são primos entre si, segue que k é múltiplo de 7, o que leva ao caso anterior.

(iii) Se $3k+7m$ é múltiplo de 7, analogamente concluímos que k é múltiplo de 7.

II. ***Encontre o número*** – A opção correta é (a).

Para que $\dfrac{N}{3}, \dfrac{N}{4}, \dfrac{N}{5}, \dfrac{N}{6}$ e $\dfrac{N}{7}$ sejam números inteiros, N deve ser um múltiplo comum de 3, 4, 5, 6 e 7. Como queremos o menor N possível, ele deve ser o mínimo múltiplo comum (MMC) de 3, 4, 5, 6 e 7, ou seja,

$$N = 3 \times 4 \times 5 \times 7 = 420.$$

III. A maior quantidade de números 1 que podemos deixar é 1007. Primeiro vamos mostrar como obtê-los. Para isso, basta tomar os pares de números consecutivos, (1,2), (3,4), (5,6), …, (2013,2014) e realizar a operação em cada par. Sabendo que números consecutivos não têm fator comum, cada um dos máximos divisores comuns será 1.

Não é possível obter mais do que isso pois a quantidade de números pares não se altera no decorrer das operações. Isso ocorre pois, se operarmos com dois números pares, teremos como resultado dois números pares, se operarmos com dois números ímpares teremos como resultado dois números ímpares e se operarmos com um número par e um número ímpar obteremos também um número par e um número ímpar. Começamos com 1007 números pares e sempre teremos 1007 números pares.