CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

AULA 1, CICLO 2

SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

Nesse sistema, todo número natural é representado por uma sequência formada pelos algarismos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Por serem 10 esses algarismos, o sistema é chamado de decimal. O sistema é também dito posicional, pois cada algarismo, além de seu valor, possui um peso que lhe é atribuído em função de sua posição dentro da sequência. Esse peso é uma potência de 10 e varia do seguinte modo:

O algarismo da extrema direita tem peso $10^0 = 1$; o seguinte, sempre da direita para a esquerda, tem peso $10^1 = 10$; o seguinte tem peso $10^2 = 100$; o seguinte tem peso $10^3 = 1\,000$ etc.

Assim, o número 1 458, no sistema decimal representa o número :

$$1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 8.$$

Os zeros à esquerda em um número são irrelevantes, pois por exemplo,

$$0231 = 0 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 1 = 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 1 = 231.$$

Cada algarismo de um número possui uma ordem, contada da direita para a esquerda. Assim, no exemplo acima (1458), o 8 é de primeira ordem, o 5 de segunda ordem, o 4 de terceira ordem e o 1 de quarta ordem.

Cada três ordens, também contadas da direita para a esquerda, constituem uma classe. As classes são usualmente separadas por um ponto.

9.123.429

Esses são os nomes das primeiras classes e ordens:

Classe das Unidades	unidades	1ª	ordem
	dezenas	2ª	ordem
	centenas	3ª	ordem
Classe do Milhar	unidades de milhar	4ª	ordem
	dezenas de milhar	5ª	ordem
	centenas de milhar	6ª	ordem
Classe do Milhão	unidades de milhão	7ª	ordem
	dezenas de milhão	8ª	ordem
	centenas de milhão	9ª	ordem

EXEMPLOS

Exemplo 1: Retire 10 dígitos do número 12345123451234512345 de modo que o número remanescente seja o maior possível. E para formar o menor número, como deveríamos proceder?

Exemplo 2: Determine o menor número com 10 algarismos tal que a soma dos seus algarismos seja igual a 40.

_____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____

Exemplo 3: Considere dois números naturais, cada um deles com três algarismos diferentes. O maior deles só tem algarismos pares e o menor só tem algarismos ímpares. Se a diferença entre eles é a maior possível, qual é esta diferença?

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Em muitos casos o uso de um critério de divisibilidade só faz sentido para números “grandes”. Para números “pequenos”, o problema de decidir se um dado número é divisível ou não por outro pode ser resolvido através do uso da tabuada ou de uma simples divisão.

Além disso, como “ser divisível por” e “ser múltiplo de” significam exatamente a mesma coisa, é importante ter em mente que um critério de divisibilidade também ´e um critério de multiplicidade.

Ajuda: Portal da Matemática, módulos, no 6º ano do Ensino Fundamental, no módulo “Divisibilidade”

DIVISIBILIDADE POR 2

A divisibilidade por 2 é a mais simples, sabemos que um número é divisível por 2 se ele for par, ou seja, se o algarismo da sua primeira ordem "unidade" for par.

Note que podemos escrever os números 10, 100, 1000 como múltiplos de 2:

$$10 = 2 \times 5$$
$$100 = 2 \times 5 \times 10$$
$$1000 = 2 \times 5 \times 100$$

Agora vamos explorar esse critério escrevendo o número 356 da seguinte forma:

$$356 = 35 \cdot 10 + 6 \quad \text{e como } 10 = 2 \cdot 5 \text{ então:}$$

$$356 = 35 \cdot (2 \cdot 5) + 6 \text{ que pode ser escrito como}$$

$$356 = 2 \cdot (35 \cdot 5) + 6$$

Sabemos que o número $2 \cdot (35 \cdot 5)$ é divisível por 2, pois é um múltiplo de 2, logo só falta verificar se 6 é divisível por 2, o que é verdade, logo 356 é divisível por 2!

Então, sabemos que pra um número ser divisível por 2, basta a sua unidade ser divisível por 2.

DIVISIBILIDADE POR 3

"Um número é divisível por 3 se a soma dos seus algarismos é divisível por 3". Para entender este critério de divisibilidade, primeiramente precisamos observar que todas as potencias de 10 deixam resto 1 quando divididas por 3:

$$10 = 3 \cdot 3 + 1.$$
$$100 = 3 \cdot 33 + 1.$$
$$1000 = 3 \cdot 333 + 1.$$

Desta observação, vamos verificar, sem efetuar a divisão, se o número 457 é ou não é divisível por 3.

O número 457 pode ser escrito como:

$$457 = 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7 \text{ ou ainda,}$$

$$457 = 4(3 \cdot 33 + 1) + 5(3 \cdot 3 + 1) + 7 \text{ e por fim}$$

$$457 = 4(3 \cdot 33) + 4 + 5(3 \cdot 3) + 5 + 7$$

Colocando o fator 3 em evidencia, vemos que

$$457 = 3(4 \cdot 33 + 5 \cdot 3) + (4 + 5 + 7).$$

Como o número $3(4 \cdot 33 + 5 \cdot 3)$ é divisível por 3, pois é múltiplo de 3, precisamos somente verificar se $4 + 5 + 7 = 16$ é divisível por 3.

Como este número não é divisível por 3, concluímos que 457 também não é divisível por 3. Mais ainda, como 16 deixa resto 1 quando dividido por 3, podemos até concluir que 457 também deixa resto 1 quando dividido por 3.

DIVISIBILIDADE POR 4

"Um número natural é divisível por 4 quando o número formado pelos seus dois últimos algarismos é divisível por 4."

Vamos explorar este critério escrevendo, por exemplo, o número 23562 do seguinte modo: $23562 = 235 \cdot 100 + 62$. E como $100 = 4 \cdot 25$ então:

$$23562 = 235 \cdot 4 \cdot 25 + 62 = 4(235 \cdot 25) + 62.$$

Como $4(235 \cdot 25)$ é divisível por 4, é suficiente analisar o número 62. Como $62 = 4 \cdot 15 + 2$ vemos que 62 não é divisível por 4 e, portanto, 23562 não é divisíveis por 4.

DIVISIBILIDADE POR 9

"Um número é divisível por 9 se a soma dos seus algarismos é divisível por 9". Como no caso da divisibilidade por 3, primeiramente observe que todas as potências de 10 deixam resto 1 quando divididas por 9:

$$10 = 9 \cdot 1 + 1.$$
$$100 = 9 \cdot 11 + 1.$$
$$1000 = 9 \cdot 111 + 1.$$

Vejamos, sem efetuar a divisão, se o número 2345 é ou não é divisível por 9.

Podemos escrever:

$$2345 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5, \text{ ou ainda,}$$
$$2345 = 2(9 \cdot 111 + 1) + 3(9 \cdot 11 + 1) + 4(9 + 1) + 5.$$
$$2345 = 2(9 \cdot 111) + 2 + 3(9 \cdot 11) + 3 + 4(9) + 4 + 5.$$

Colocando o fator 9 em evidencia,

$$2345 = 9(2 \cdot 111 + 3 \cdot 11 + 4) + (2 + 3 + 4 + 5).$$

Como o número $9(2 \cdot 111 + 3 \cdot 11 + 4)$ é divisível por 9, precisamos somente verificar se o número $2 + 3 + 4 + 5 = 14$ é divisível por 9.

Como este número não é divisível por 9, podemos concluir que 2345 também não é divisível por 9. Mais ainda, assim como 14 deixa resto 5, 2345 também deixa resto 5 quando dividido por 9.

DIVISIBILIDADE POR 5, 6, 8 E 10

- Um número é divisível por 5 quanto termina em 0 ou em 5;
- Um número é divisível por 6 quando é divisível, ao mesmo tempo, por 2 e por 3;
- Um número é divisível por 8 se o número formado pelos seus últimos 3 algarismos é divisível por 8;
- um número é divisível por 10 quando termina em zero.

RESUMO

- Um número é divisível por 2 se a sua unidade for par;
- Um número é divisível por 3 se a soma dos seus algarismos é divisível por 3;
- Um número é divisível por 4 quando o número formado pelos seus dois últimos algarismos é divisível por 4;
- Um número é divisível por 5 quanto termina em 0 ou em 5;
- Um número é divisível por 6 quando é divisível, ao mesmo tempo, por 2 e por 3;
- Um número é divisível por 8 se o número formado pelos seus últimos 3 algarismos é divisível por 8;
- Um número é divisível por 9 se a soma dos seus algarismos é divisível por 9;
- Um número é divisível por 10 quando termina em zero.

EXEMPLOS

Exemplo 1: Verifique se cada um dos números é divisível por 2, 3, 4, 5, 6, 9 ou 10.

(A) 1260.

2
3
4
5
6
9
10

EXEMPLOS

Exemplo 1: Verifique se cada um dos números é divisível por 2, 3, 4, 5, 6, 9 ou 10.

(B) 1746.

2
3
4
5
6
9
10

EXEMPLOS

Exemplo 1: Verifique se cada um dos números é divisível por 2, 3, 4, 5, 6, 9 ou 10.

(B) 2210505

2
3
4
5
6
9
10

Exemplo 2: Coloque algarismos no lugar dos asteriscos de modo que o número 32*35717* seja divisível por 72.

1. Um número é divisível por 72 se for divisível por 8 e por 9.
2. Pelo critério de divisibilidade por 8, o número 17* tem que ser divisível por 8.

   8 x 20 = 160, 8 x 21 = 168, 8 x 22 = 176, 8 x 23 = 184.

   Você pode verificar facilmente que o único algarismo que funciona é 6.
3. De acordo com o critério de divisibilidade por 9, a soma dos algarismos do número 32*357176 tem que ser divisível por 9.

Logo, 3+2+3+5+7+1+7+6+* = a um múltiplo de 9, note que:

3+2+3+5+7+1+7+6 = 34, logo o último algarismo que faltava é 2, pois 34 + 2 = 36 que é múltiplo de 9.

Portanto a resposta é 322357176.

Exemplo 3:

(a) Qual é o menor múltiplo positivo de 9 que é escrito apenas com os algarismos 0 e 1?

(b) Qual é o menor múltiplo positivo de 9 que é escrito apenas com os algarismos 1 e 2?

OBRIGADO PELA PRESENÇA DE TODOS!