**Atividades – Aritmética 3**

**Encontro 7 – Aritmética 3 – 26/08/2016**

**Máximo Divisor Comum - mdc**

* Deﬁnição: mdc (a,b) é o maior divisor comum de a e de b.

Para calcular cada um destes números, mdc (a,b), listamos os divisores de a, listamos os divisores de b, selecionamos os divisores comuns de a e de b, e identiﬁcamos mdc (a,b) como o maior divisor comum.

* Propriedades do mdc

P.1 – o mdc de dois ou mais números é 1, se e só se, eles forem primos entre si.

Exemplos:

mdc (7,3) = 1

mdc (11,4) = 1

mdc (10,11,12) = 1

mdc (4,8,15) = 1

P.2 – o mdc de dois ou mais números, onde o menor é o divisor do maior, é o menor deles.

Exemplos

mdc (4,8) (4 é divisor de 8, e dele mesmo) = 4

mdc (60,36,12) = 12

P.3- Seja K, a1, a2, a3, ... números naturais diferentes de 0.

mdc (Ka1, Ka2, Ka3, ...) = K x mdc (a1, a2, a3, ...)

Exemplo:

mdc (180, 280, 300) (são múltiplos de 10, são pares, logo múltiplos de 20) = mdc (20 x 9, 20 x 14, 20 x 15) = 20 x mdc(9, 14, 15) = 20 x 1 = 20

P.4 – Sejam a, b e c números naturais.

mdc (a,b,c) = mdc (mdc(a,b), c) = mdc (a, mdc(b,c))

Exemplo:

mdc (60, 36, 48) = mdc (mdc(60, 36), 48) = mdc (12, 48) = 12

**Mínimo Múltiplo Comum – mmc**

* Deﬁnição: mmc (a,b) é o menor múltiplo comum de a e de b.

Para calcular cada um desses números, mmc(a,b), listamos os múltiplos de a, listamos os múltiplos de b, e identiﬁcamos o mmc(a,b) como o menor múltiplo comum.

* Propriedades mmc

P.1 – o mmc de dois ou mais números primos entre si é o produto deles.

Exemplo:

mmc (3,4) = 12

mmc (99, 100) = 9.900

mmc (2,5,7) = 70

P.2 – o mmc de dois ou mais números, onde o maior é múltiplo do menor, é o maior deles.

Exemplos

mmc (3,6) = 6

 mmc (4, 8, 16) = 16

mmc (4, 5, 40) = 40

P.3- qualquer múltiplo do mmc de dois ou mais números naturais também será múltiplo desses números.

Exemplo:

mmc (3,4) = 12

M (12) = (0, 12, 24, 36, ...)

P.4 – o produto do mmc pelo mdc de dois números naturais é igual ao produto dos números.

mmc (a,b) x mdc (a,b) = ab

Exemplo: 60, 36

mmc (60, 36) x mdc (60, 36) = 60 x 36 = 2160

mmc (36, 60) = 180

mdc (36, 60) = 12

180 x 12 = 2160

OBS.: No mdc (na decomposição) escolhe os fatores comuns e de menores expoentes

No mmc

Se for comum: pega o de maior expoente

Se não for comum:

Sabemos que todo múltiplo do mmc de dois inteiros é um múltiplo comum desses inteiros.

* **Teorema** Todo múltiplo comum de dois inteiros a e b é múltiplo de mmc (a,b)
* **Teorema**: Sejam a e b dois úmeros inteiros positivos. Tem-se a seguinte identidade: mmc (a,b) x mdc (a,b) = a x b

**Cálculo do mdc e do mmc: dada a fatoração**

* Deﬁnição: Dois números naturais a e b são relativamente primos, ou primos entre si, se não existir um número primo que divide simultaneamente a e b. De modo equivalente, isto signiﬁca que mdc (a,b) = 1.

 Por exemplo, 28 = 22 · 7 e 45 = 32 · 5 são relativamente primos, ou primos entre si, pois não existe um fator primo em comum entre a e b. De modo equivalente isto também poderia ser concluído do fato de mdc (28,45) = 1.

**Cálculo do mdc e do mmc: fatorando simultaneamente**

Exemplo: Determine o menor número inteiro positivo de três algarismos que é divisível, ao mesmo tempo, por 4, 8 e 12.

Dizer que um número é divisível por 4, 8 e 12 é o mesmo que dizer que este número é um múltiplo, ao mesmo tempo, de 4, 8 e 12. Como sabemos, todos os múltiplos de 4, 8 e 12 são múltiplos do mmc(4,8,12) = 24. Como 2 × 24 = 48, 3 × 24 = 72, 4 × 24 = 96 e 5×24 = 120, concluímos que o menor número inteiro positivo de três algarismos que é divisível, ao mesmo tempo, por 4, 8 e 12 é o número 120.

**Divisores**

Diremos que um número inteiro d é um divisor de outro inteiro a, se a é múltiplo de d; ou seja, se a=dxc, para algum inteiro c.

* Quando a é múltiplo de d dizemos também que a é divisível por d ou que d divide a.

Representamos o fato de um número d ser divisível de um número a, ou d dividir a, pelo símbolo d l a. Caso não divida a, escrevemos d  a.

Por exemplo, 1 / 6, 2 / 6, 3 / 6, 6 / 6, -6 / 6, -3 / 6, -2 / 6, -1 / 6

* Definição: dados dois números inteiros a e b não simultaneamente nulos, o maior divisor comum de a e b será chamado de máximo divisor comum de a e b e denotado por mdc (a,b)

Note que: mdc (a,b) = mdc (b,a)

**Atividades**

1. Dois rolos de arame, um de 210 metros e outro de 330 metros, devem ser cortados em pedaços de mesmo comprimento. De que modo isto pode ser feito se desejamos que cada um destes pedaços tenha o maior comprimento possível?
2. Se a = 2³·5·7² identiﬁque quais dos seguintes números são múltiplos de a.

(a) $2^{4}$ ·5² ·7³

 (b) 2·5·$7^{4}$ ·13²

(c) $2^{5}$ ·5² ·7

(d) 2³ ·5·$7^{6}$ ·13·19²

(e) $2^{7}$ ·5³ ·$7^{4}$ ·60

1. Em cada caso, calcule mmc (a,b).

(a) a = 2·5³, b = 2² ·.$7^{4}$

(b) a = 3² ·11, b = 2³ ·3·.$5^{4}$

(c) a = 5² ·7, b = 5² ·7³.

(d) a = 2·13, b = 3·5.

1. Calcule mdc(100,140).
2. (Banco de Questões 2010, nível 1, problema 28) Uma bibliotecária recebe 130 livros de Matemática e 195 livros de Português. Ela quer arrumá-los em estantes, colocando igual quantidade de livros em cada estante, sem misturar livros de Matemática e de Português na mesma estante. Quantos livros ela deve colocar em cada estante para que o número de estantes utilizadas seja o menor possível?
3. Determine a quantidade mínima de placas quadradas que são necessárias para cobrir uma superfície retangular de 12,8 m de comprimento por 9,6 m de largura?
4. Suponha que n seja um número natural divisível por a e por b. sabendo que mdc (a,b) = 1, mostre que n é divisível por a x b.