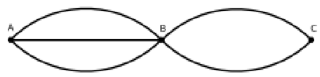
Exercícios

Exercício 1. Considere três cidades A, B e C, de forma tal que existem três estradas ligando A à B e dois caminhos ligando B à C.



a) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C?

Solução: Perceba que a cidade A é ligada à cidade B por três estradas diferentes, já a cidade B é ligada à cidade C por duas estradas distintas. Logo temos 3 possibilidades para ir de A até B e 2 possibilidades para ir de B até C, então há $3 \times 2 = 6$ formas diferentes de ir de A até C.

b) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C e depois voltar para A?
Solução: Vamos resolver da mesma maneira que o exercício anterior, mas agora temos que considerar as possibilidades de A pra B, de B pra C, de C pra B e de B pra A, como vimos anterior temos 3, 2, 2, 3 possibilidades respectivamente pra esses caminhos, logo temos $3 \times 2 \times 2 \times 3 = 36$ formas de fazer o caminho pedido.

c) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C e depois voltar para A sem repetir estradas?

Solução: Pensando da mesma maneira, ir de A para B, tenho 3 formas, ir de B para C tenho 2 formas, só que agora ir de C pra B, já não tenho mais 2 possibilidades, mas sim 1 possibilidade, pois não posso usar a estrada de ida e de B para A eu tenho 2 possibilidades, usando o Princípio Multipicativo temos $3 \times 2 \times 1 \times 2 = 12$ possibilidades de fazer este caminho.

Exercício 2. Dispondo dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 , 6, 7 pode- se formar quantos números de...

a) de 4 algarismos?
Solução: Temos no total 8 alagarismos, como não podemos usar o 0 na unidade de milhar, então temos 7 possibilidades para este e 8 possibilidades para os demais algarismos restantes, pois não há nenhuma restrição para estas, logo pode- se formar $7 \times 8 \times 8 \times 8 = 3584$ números de 4 algarismos.

b) de 4 algarismos distintos?
Solução: Para a unidade de milhar eu tenho 7 possibilidades, como na anterior. Para o algarismo das centenas eu tenho 7 possibilidades, pois posso usar o O. Para as dezenas tenho 6 possibilidades, pois não posso usar as duas anteriores e 5 possibilidades para as unidades; logo temos $7 \times 7 \times 6 \times 5 = 1470$ possibilidades.

c) ímpares e de 3 algarismos distintos?
Solução: Como queremos que seja um número ímpar, então há 4 possibilidades para as unidades, 6 possibilidades para o algarismos das centenas e 6 possibilidades para o algarismo das dezenas, logo pelo Princípio Multiplicativo temos $6 \times 6 \times 4 = 144$ possibilidades.

Exercício 3. Dezesseis pessoas fazem fila na padaria. O dono da padaria oferece vinho à frequesia. Uma garrafa é entregue à primeira pessoa da fila e passada de pessoa a pessoa desde a primeira da fila até a última, sem retornar. Por 4 vezes a garrafa foi passada de uma mulher para uma mulher, por 3 vezes de uma mulher para um homem e por 6 vezes de um homem a um homem

a) Por quantas vezes a garrafa foi passada de um freguês para o outro?
Solução: A cada vez que uma pessoa da fila passa a garrafa uma outra de recebê-la. À excessão da primeira pessoa da fila, cada uma das pessoas recebe a garrafa de outra pessoa da fila exatamente uma vez. Como existem 16 pessoas na fila, a garrafa é recebida então por 15 vezes, logo é também passada por 15 vezes.

b) Quantas vezes foi a garrafa passada de um homem na fila a uma mulher na fila ?

Solução: Por 4 vezes a garrafa foi passada de uma mulher para uma mulher, 3 vezes de uma mulher para um homem e 6 vezes de um homem para um homem. Essas transferências contabilizam um total de $4 + 3 + 6 = 13$ vezes. pelo item anterior, o total de vezes em que a garrafa é tranferida é igual a 15. Portanto, a garrafa foi passada $15 - 13 = 2$ vezes de um homem para uma mulher.

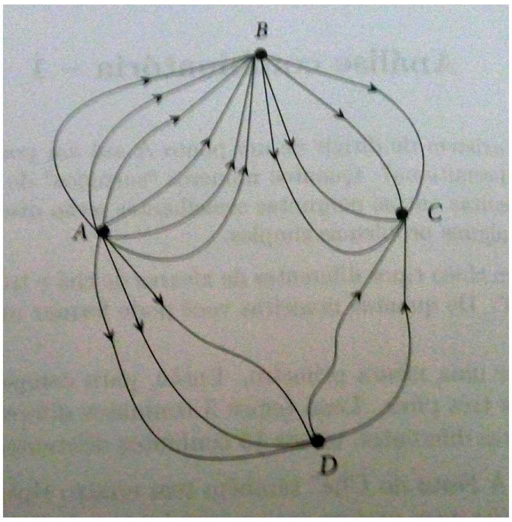
c) A primeira pessoa da fila é homem ou mulher? E a última pessoa da fila?

Solução: Sejam $N(h, h) = 6$, $N(h, m) = 2$, $N(m, h) = 3$ e $N(m, m) =$ 3respectivamente as quantidades de vezes nas quais a garrafa foi passada de um homem a um outro homem, de um homem a uma mulher, de uma mulher para um homem e de uma mulher para outra mulher.
Observe que:

- a garrafa foi recebida por homens um total de$N(h, h) + N(m, h) = 9$ vezes;
- a garrafa foi passada por uma mulher um total de $N(m, h) + N(m, m) = 7$ vezes.

Como as mulheres receberam a garrafa menos vezes de que a passaram, a primeira pessoa da fila deve ser uma mulher, já que essa é a única pessoa que passa a garrafa sem tê-la recebido de ninguém da fila.

Exercício4. Foi construída uma cidade nova D e diversas estradas novas no País das Maravilhas. E agora, de quantas maneiras é possível dirigir de A até C?



Solução: Considere dois casos: nosso trajeto passa por B ou por D. Em cada caso é bem fácil calcular o número de trajetos possíveis, se o trajeto passar por B, existem 24 maneiras de dirigir de A para C, caso contrário, existem 6 maneiras. Para obter a resposta, basta somar estes dois números. Assim existem 30 trajetos possíveis.

Exercício 5. Na loja A Festa do Chá são vendidos cinco tipos diferentes de xícaras de chá, três tipos de pires e quatro tipos de colheres de chá. Quantas compras diferentes de dois itens com nomes diferentes podem ser feitas?

Solução: Existem três casos possíveis, uma xícara e um pires, uma xícara e uma colher, ou um pires e uma colher. Não é difícilcalcular o número de possibilidades em cada um destes três casos: 15, 20, 12 respectivamente. Somando, obtemos a resposta: 47.

Exercício 6. Vamos chamar um número natural de todo ímpar se todos os seus algarismos forem ímpares. Quantos números todo-ímpares de quatro algarismos existem?

Solução: É claro que existem 5 números todo-ímpares com um algarismo. Podemos colocar um algarismo ímpar à direita de qualquer número todo-ímpar com um algarismo de cinco maneiras. Assim, temos $5 \times 5 = 25$ números todo-ímpares com três algarismos e $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 625$ números todo-ímpares com 4 algarismos.

Exercício 7. Um país tem 20 cidades e cada par de cidades está conectado por uma rota aérea. Quantas rotas aéreas existem?

Solução: Toda rota conecta duas cidades, Escolhemos qualquer uma das 20 cidades(digamos a cidade A) como início de uma rota e temos as 19 cidades restantes para escolher como final da rota (digamos a cidade B). Multiplicando, obtemos $20 \times 19 = 380$. No entanto, este cálculo conta toda a rota AB duas vezes: quando a cidade A é ecolhida como início da rota e quando B é escolhida como início. Logo o número de rotas é $\frac{380}{2} = 190$.