Módulo de Probabilidade – Miscelânea de Exercícios

Cálculo de Probabilidades

2^a série E.M.

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Probabilidade – Miscelânea de Exercícios
Cálculo de Probabilidades

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Cinco casais formados, cada um, por marido e mulher, são aleatoriamente dispostos em grupos de 2 pessoas cada um. Calcule a probabilidade de que todos os grupos sejam formados por:

a) uma mulher e seu marido;

b) pessoas de sexos diferentes.

Exercício 2. Um ponto é selecionado aleatoriamente dentro de um triângulo equilátero de lado $L = 3$. Qual a probabilidade da distância desse ponto a qualquer vértice ser maior do que 1?

Exercício 3. Dois jogadores se enfrentam em uma batalha de War, o Jogo da Estratégia. O atacante lança três dados e o defensor, dois. O atacante conquistará o território do defensor em apenas um lance de dados se, e somente se, as duas condições seguintes forem satisfeitas:

i) o maior dado do atacante for maior do que o maior dado do defensor; e

ii) o segundo maior dado do atacante for maior do que o segundo maior dado do defensor (convencionamos que o "segundo maior dado" pode ser igual ao maior dado, caso dois ou mais dados empatem no maior valor).

Calcule a probabilidade de o atacante conquistar o território com o defensor tirando:

a) 2 cincos.

b) 1 cinco e 1 quatro.

Exercício 4. Em cada concurso da Mega-Sena, sorteiam-se seis valores entre sessenta "dezenas" (de 1 até 60).

a) Calcule a probabilidade de o apostador ganhar a sena se fizer um jogo com sete "dezenas" em um sorteio.

b) Calcule a probabilidade de o apostador ganhar a sena pelo menos uma vez se fizer uma aposta simples (seis números) em sete sorteios consecutivos.

Exercício 5. Duas pessoas marcam um encontro no Farol da Barra, combinando o seguinte:

- cada qual chega à praça num momento escolhido ao acaso entre meio-dia e à uma hora da tarde; e
- nenhum deles espera mais de 15 minutos pelo outro.

Qual a probabilidade que eles realmente se encontrem?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Asdrúbal tem problemas para acordar e chegar no horário da aula. Ele sempre usou a célebre desculpa de que o despertador não tocou e, por isso, seu professor recomendou que ele usasse 3 despertadores. Sabendo-se que a probabilidade de um despertador falhar é 1%, qual será a probabilidade de ao menos um despertador tocar e Asdrúbal chegar no horário (ou moralmente não ter como usar essa desculpa)?

Exercício 7. O controle de qualidade de uma empresa fabricante de telefones celulares aponta que a probabilidade de um aparelho de determinado modelo apresentar defeito de fabricação é de $0,2\%$. Se uma loja acaba de vender 4 aparelhos desse modelo para um cliente, qual é a probabilidade de esse cliente sair da loja com exatamente dois aparelhos defeituosos?

Exercício 8. Um ponto M é selecionado ao acaso no interior de um círculo C de raio 2 e centro O. Em seguida, constrói-se um quadrado, também centrado em O, que tem M como ponto médio de um de seus lados. Calcule a probabilidade de que o quadrado assim construído esteja inteiramente contido no círculo C.

Exercício 9. Escolhendo-se ao acaso três vértices de um hexágono regular, qual a probabilidade de que os vértices escolhidos sejam vértices de um:

a) triângulo retângulo?

b) triângulo equilátero?

Exercício 10. Escolhendo-se três vértices de um cubo, qual a probabilidade de serem escolhidos três vértices numa mesma face?

Exercício 11. Em um campo de futebol com 23 pessoas (22 jogadores e o juiz). Qual a probabilidade de que pelo menos duas dessas 23 pessoas façam aniversário na mesma data (dia e mês)?

Exercício 12. Um determinado provedor de internet oferece aos seus usuários 15 salas de bate papo. Três usuários decidiram acessar as salas. Cada um escolheu , independentemente, uma sala. Qual a probabilidade de os 3 usuários terem escolhido a mesma sala?

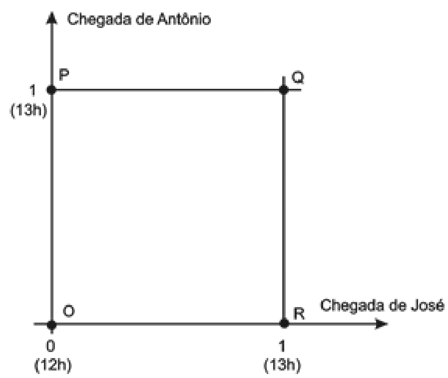
Exercício 13. Os trabalhos da diretoria de um clube são realizados por seis comissões que contém a mesma quantidade de membros. Cada diretor participa exatamente de duas comissões e cada duas comissões têm exatamente um diretor comum.

a) Quantos diretores tem o clube?

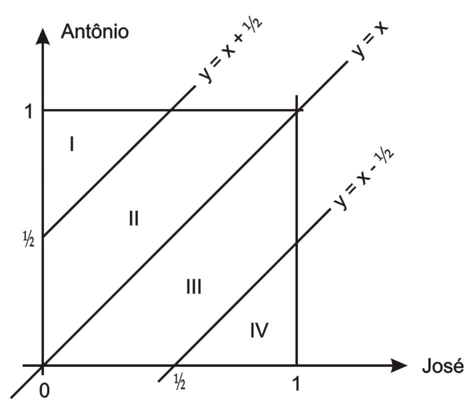
b) Escolhendo-se, ao acaso, dois diretores, qual é a probabilidade de que eles sejam de uma mesma comissão?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 14. José e Antônio viajarão em seus carros com as respectivas famílias para a cidade de Serra Branca. Com a intenção de seguir viagem juntos, combinam um encontro no marco inicial da rodovia, onde chegarão, de modo independente, entre meio-dia e 1 hora da tarde. Entretanto, como não querem ficar muito tempo esperando um pelo outro, combinam que o primeiro que chegar ao marco inicial esperará pelo outro, no máximo, meia hora; após esse tempo, seguirá viagem sozinho. Chamando de x o horário de chegada de José e de y o horário de chegada de Antônio, e representando os pares $(x; y)$ em um sistema de eixos cartesianos, a região $OPQR$ ao lado indicada corresponde ao conjunto de todas as possibilidades para o par $(x; y)$:



a) Segundo o combinado, para que José e Antônio viajem juntos, é necessário que $y - x \leq \dfrac{1}{2}$ ou que $x - y \leq \dfrac{1}{2}$.



De acordo com o gráfico e nas condições combinadas, qual a probabilidade de José e Antônio viajarem juntos?

b) Na região indicada, o conjunto de pontos que representa o evento "José e Antônio chegam ao marco inicial exatamente no mesmo horário" corresponde a qual elemento da região $OPQR$?

Exercício 15. Escolhendo aleatoriamente três vértices de um octógono regular, qual a probabilidade de eles determinarem um triângulo retângulo?

Exercício 16. Em uma urna com 100 bolas, numeradas de 1 até 100, retiramos um bola ao acaso. Olhamos o seu número e a devolvemos à urna. Agora, fazemos uma segunda retirada, qual a probabilidade de a segunda bola ser maior que a primeira?

Exercício 17. Em um bosque, um caçador prepara diariamente 10 armadilhas para capturar lebres. Contando com muitos anos de experiência o caçador sabe que a probabilidade diária de apanhar uma lebre em qualquer uma das armadilhas é de $0,4$, sendo que cada armadilha captura, no máximo, uma lebre por dia. Admitindo-se que o bosque seja suficientemente grande, de tal forma que uma armadilha não interfira na atuação da demais, calcule, em percentagem, a chance de o caçador capturar exatamente 5 lebres em um mesmo dia. Despreze a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

Exercício 18. Uma caixa branca contém 5 bolas verdes e 3 azuis, e uma caixa preta contém 3 bolas verdes e 2 azuis. Pretende-se retirar uma bola de uma das caixas. Para tanto, 2 dados são atirados. Se a soma resultante dos dois dados for menor que 4, retira-se uma bola da caixa branca. Nos demais casos, retira-se uma bola da caixa preta. Qual é a probabilidade de se retirar uma bola verde?

Exercício 19. Um rapaz esqueceu o último algarismo do número do telefone da namorada e resolveu tentar falar com ela escolhendo ao acaso o último algarismo. Qual a probabilidade que ele acerte o número da namorada em até 3 tentativas?

Exercício 20. Sérgio convida duas jovens, Vera e Luíza, para um passeio no final de semana. Sabe-se que a probabilidade de Vera aceitar o convite é $0,7$, de Luíza aceitar é $0,4$ e que a probabilidade de qualquer uma delas aceitar ou não o convite independe da resposta da outra. Nessas condições,

a) determine a probabilidade de apenas Vera ou apenas Luíza aceitarem o convite;

b) determine a probabilidade de Vera ou Luíza aceitarem o convite.

Respostas e Soluções.

1. (Extraído da Videoaula (UERJ))

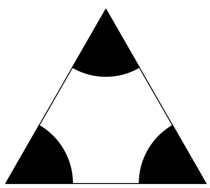
a) Basta ocuparmos as posições pares, para que, consequentemente, as posições ímpares sejam ocupadas com o cônjuge daquele que ocupou a posição par, o que ocorre de

$$P = \frac{10}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{945}.$$

b) Podemos formar filas com as posições ocupadas de forma alternada pelos gêneros. Isso pode ser feito de

$$P = \frac{10}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{8}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{8}{63}.$$

2. (Extraído da Videoaula (AFA))



O ponto pedido precisa se localizar na região branca da figura acima. Agora, a probabilidade pedida será calculada como

$$P = \frac{\text{área branca}}{\text{área total}}.$$

A área branca será igual a área total, menos a área de três setores circulares de ângulo igual a 60° e mesmo raio igual a 1, ou seja, um setor de 180°, que é um semicírculo de raio unitário.

$$\begin{aligned} P &= \frac{\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi \cdot R^2}{2}}{\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}} \\ &= 1 - \frac{\pi \cdot 1^2}{2} \cdot \frac{4}{3^2 \cdot \sqrt{3}} \\ &= 1 - \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}. \end{aligned}$$

3. Consideremos que todos os dados são honestos com os resultados equiprováveis.

a) Para ganhar, precisamos tirar ao menos dois 6. A probabilidade será igual a soma das probabilidades de tirarmos

- três seis: $P_1 = \left(\frac{1}{6}\right)^3$; e
- dois seis e outro número qualquer diferente de 6: $P_2 = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{6^3}$.

Ficando com $\frac{1}{6^3} + \frac{15}{6^3} = \frac{16}{6^3}$.

b) Para ganhar, precisamos tirar ao menos um maior do que 5 e outro maior do que 4. A probabilidade será igual a soma das probabilidades de tirarmos

- três seis:
  $P_1 = \left(\frac{1}{6}\right)^3$; e
- dois seis e outro número qualquer diferente de 6:
  $P_2 = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{6^3}$;
- um seis e dois cincos:
  $P_2 = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{3}{6^3}$;
- um seis, um cinco e outro qualquer(< 5):
  $P_2 = 3! \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{24}{6^3}$;

Portanto, ficamos com $\frac{1}{6^3} + \frac{15}{6^3} + \frac{3}{6^3} + \frac{24}{6^3} = \frac{43}{216}$.

4. A probabilidade de um apostador ganhar na Mega-Sena com um jogo de seis dezenas (sena) é igual a

$$P_6 = \frac{6!}{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55}.$$

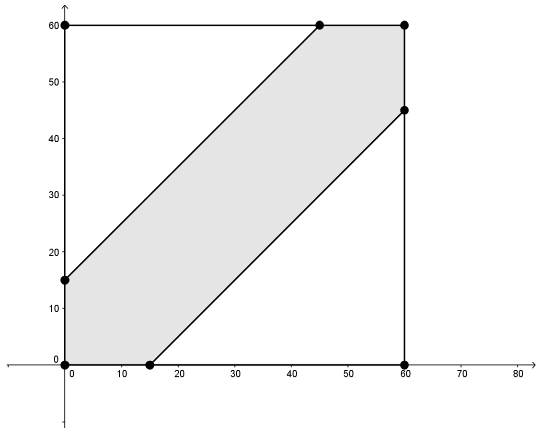
a) Como serão jogados 7 números, a probabilidade aumenta para

$$\begin{aligned} P &= \binom{7}{6} \cdot \frac{6!}{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55} \\ &= \frac{7!}{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55}. \end{aligned}$$

b) A probabilidade de derrota é de $1 - \frac{6!}{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55}$, a probabilidade de derrota em sete jogos é igual a $\left(1 - \frac{6!}{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55}\right)^7$, assim a probabilidade de vitória será igual a

$$1 - \left(1 - \frac{6!}{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55}\right)^7.$$

5. No gráfico abaixo, cada eixo representa os horários de chegada de uma das pessoas. Escolhido um ponto no eixo x, é possível determinar, no eixo y, os pontos máximo e mínimo de chegada da outra pessoa para que ambas se encontrem considerando os intervalos de espera de 15 minutos. Veja que a área de encontro está na região cinza.



O quadrado tem área $60 \times 60 = 3600$. E a área interna ao quadrado, e externa ao hexágono cinza, é composta por dois triângulos retângulos isósceles de catetos medindo 45 (área $\dfrac{45 \times 45}{2}$). Assim a área cinza mede $3600 - 2 \times \dfrac{45 \times 45}{2} = 1575$, e a probabilidade do encontro ocorrer aí é

$$P = \frac{1575}{3600} = 47,75\%.$$

6. Se a probabilidade de falha é de 1%, então a de acerto é de 99%. A probabilidade de ao menos um tocar é igual ao complementar da probabilidade de todos falharem. Todos falharão com

$$P = 0,01 \cdot 0,01 \cdot 0,01 = 10^{-6},$$

e ao menos um tocará com

$$\overline{P} = 1 - 10^{-6} = 0,999999$$

7. (Extraído do ENEM)
Se a probabilidade de defeito é $P_d = 0,2\%$, a de que o produto esteja bom é $P_b = 1 - 0,002 = 0,998 = 99,8\%$. Como pede-se a probabilidade que exatamente dois sejam defeituosos, então os outros dois devem estar bons, o que resulta em

$$P = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{0,2}{100}\right)^2 \cdot \left(\frac{99,8}{100}\right)^2.$$

8. (Extraído da Videoaula (UERJ))
Para um quadrado de lado 2ℓ, lembre-se que o raio da sua circunferência inscrita mede ℓ. Agora, se $\ell^2 + \ell^2 = 2^2$, ou seja, $\ell = \sqrt{2}$, então o quadrado estará inscrito no círculo em questão (vértices pertencem à circunferência dada). Assim, para que o quadrado esteja interno (ou na borda) do círculo, o ponto M deve pertencer ao círculo (ou à circunferência) de centro O e raio $\sqrt{2}$. A probabilidade para tal é de

$$P = \frac{\pi \cdot \sqrt{2}^2}{\pi \cdot 2^2} = \frac{1}{2}.$$

9. (Extraído da Videoaula)
O total de triângulos possíveis é igual a $C_3^6 = 20$.

a) Todo triângulo retângulo está circunscrito a uma semicircunferência. Sendo assim, basta traçarmos diâmetros para determinar a hipotenusa (3 diâmetros possíveis) e depois escolhermos entre os 4 pontos restantes ($3 \times 4 = 12$) para obtermos o total de triângulos retângulos. Por fim, a probabilidade fica

$$P = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 60\%.$$

b) Os triângulos equiláteros são apenas 2. Daí, a probabilidade é $P = \dfrac{2}{20} = 10\%$.

10. (Extraído da Videoaula)
Podemos escolher os trios de $C_3^8 = 56$ formas. Agora, para compor uma mesma face, podemos ter $6 \times C_3^4 = 24$ formas. Por fim, a probabilidade fica $P = \dfrac{24}{56} = \dfrac{3}{7}$.

11. (Extraído da Videoaula)
Podemos utilizar o método da probabilidade complementar. Assim, vamos calcular a probabilidade de não haver coincidência de data, que é

$$P = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{344}{365} \cdot \frac{343}{365}.$$

Por fim, a probabilidade pedida é

$$\overline{P} = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{344}{365} \cdot \frac{343}{365} \cong 50,7\%.$$

12. (Extraído da Videoaula (UFF))
O primeiro usuário pode escolher qualquer sala. Agora, o segundo usuário tem $\dfrac{1}{15}$ de probabilidade de escolher a mesma sala. Por fim, o terceiro também tem $\dfrac{1}{15}$ de probabilidade de cair na mesma sala que os outros estão, assim

$$P = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{15^2}.$$

13. (Extraído do vestibular da FUVEST)

a) Como a cada duas comissões há exatamente um diretor em comum e cada diretor participa de exatamente duas comissões, segue que existem $C_2^6 = 15$ diretores.

b) Somando a quantidade de apariçções do nome de cada diretor em todas as comissões, obtemos $6n$. Por outro lado, como cada nome aparece em duas comissões e existem 15 diretores, temos $6n = 2 \cdot 15 = 30$. Logo, $n = 5$. Assim, em cada comissão, existe $C_2^5 = 10$ pares de diretores. Como o total de duplas de diretores é $C_2^{15} = 105$ e cada dupla aparece apenas uma vez, a probabilidade de escolhermos dois diretores numa mesma comissão é

$$P = \frac{6 \times 10}{105} = \frac{4}{7}.$$

14. (Adaptado do ENEM)

a) Observe que a área destacada por I é um triângulo retângulo de catetos iguais a $\frac{1}{2}$ (área $\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}$), o mesmo para a área IV. Assim a área que interessa tem a probabilidade de $1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4} = 75\%$ de ocorrer.

b) A diagonal OQ está contida na identidade ($y = x$), então ela representa os pares de mesmos horários para as chegadas de José e Antônio.

15. (Adaptado do vestibular da PUC SP)
O total de triângulos possíveis é $C_3^8 = 56$. Agora, para formar um triângulo retângulo, precisamos de alguma dos diâmetros, que também precisam ser diagonais. Há 4 cordas com nessa situação. Feito isso, para cada diâmetro, temos 6 triângulos, totalizando $4 \times 6 = 24$. E a probabilidade fica

$$P = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}.$$

16. Há 100×100 resultados possíveis, 100 deles possuem resultados iguais e, no restante, metade tem a sequência (maior,menor) e a outra metade fica (menor,maior). Assim, a quantidade de resultados desejados é $\frac{100 \cdot 100 - 100}{2}$ e a probabilidade fica

$$P = \frac{\frac{100 \cdot 100 - 100}{2}}{100 \cdot 100} = \frac{99}{200}.$$

17. (Extraído do vestibular da UNB)
Aplicaremos a probabilidade binomial na expressão $(c+n)^{10}$, buscando a parcela $\binom{10}{5} c^5 n^5$, na qual c é a probabilidade de capturar uma lebre e n a de não capturar. Assim, ficamos com

$$\begin{aligned}\binom{10}{5} c^5 n^5 &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot (0,4)^5 \cdot (0,6)^5 \\ &= 252 \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^5 \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^5 \\ &= 0,2006581248 \\ &\cong 20\%.\end{aligned}$$

18. (Extraído do vestibular da ITA)
As bolas verdes da caixa branca ocorrem com a probabilidade de $\frac{3}{36} \cdot \frac{5}{8}$ e da caixa preta com $\frac{33}{36} \cdot \frac{3}{5}$. Assim, o total fica

$$\begin{aligned}\frac{3}{36} \cdot \frac{5}{8} + \frac{33}{36} \cdot \frac{3}{5} &= \frac{5}{96} + \frac{11}{20} \\ &= \frac{25 + 264}{480} = \frac{289}{480}.\end{aligned}$$

19. (Adaptado vestibular da UEGO)
Ele pode acertar de primeira com $P_1 = \frac{1}{10}$. No caso de acertar na segunda tentativa, temos o erro na primeira, e a probabilidade igual a $P_2 = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{10}$. Para o acerto na terceira, temos dois erros, e $P_3 = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{10}$. Por fim, o resultado fica

$$P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}.$$

20. (Extraído do vestibular da UNESP)

a) A probabilidade de apenas Vera aceitar ir ao passeio é de $0,7 \cdot 0,6 = 0,42$. E apenas Luíza é $0,4 \cdot 0,3 = 0,12$. A soma desses valores é $0,54$.

b) A probabilidade de ambas aceitarem é $0,7 \cdot 0,4 = 0,28$ e, juntamente com o valor do item anterior, totaliza uma probabilidade $0,28 + 0,54 = 0,82$.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com