Exercícios sobre Métodos de Contagem

1) Um grupo de 4 alunos (Alice, Bernardo, Carolina e Daniel) tem que escolher um líder e um vice-líder para um debate.

(a) Faça uma lista de todas as possíveis escolhas (use a inicial de cada nome, para facilitar). Organize a sua lista do seguinte modo: primeiro, escreva todas as possibilidades em que Alice é a presidente, depois, aquelas em que Bernardo é presidente, e assim por diante.
Solução: As possíveis escolhas de líder e vice-líder são (usando somente as iniciais): $A-B$,$A-C$, $A-D$, $B-A$, $B-C$, $B-D$, $C-A$, $C-B$, $C-D$,$D-A$, $D-B$, $D-C$. Portanto, no total há 12 escolhas possíveis.

(b) Conte o número de possíveis escolhas e verifique que o Princípio Multiplicativo fornece a mesma resposta.
Solução: Há 4 maneiras de escolher o líder. Para cada uma dessas escolhas, o vide-líder pode ser escolhido de 3 modos (já que a mesma pessoa não pode, ao mesmo tempo, ser líder e vice-líder). Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o número de possibilidades é$4 \times 3 = 12$, que foi o que obtivemos contando diretamente.

2) Um restaurante possui um cardápio que apresenta escolhas de saladas (salada verde, salada russa ou salpicão), sopas (caldo verde, canja ou de legumes) e pratos principais (bife com fritas, peixe com puré, frango com legumes ou lasanha).

(a) De quantos modos se pode escolher um prato deste cardápio?
*Solução:*Como há 3 opções de saladas, 3 de sopas e 4 de pratos principais, há$3+3+4=10$ modos de escolher um prato do cardápio.

(b) De quantos modos se pode escolher uma refeição completa, formada por uma salada, uma sopa e um prato principal?
Solução: O número de possíveis refeições é

$$3(saladas) \times 3(sopas) \times 4(pratosprincipais) = 36.$$

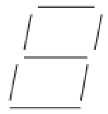
3) Quantos algarismos são escritos ao se escreverem os números inteiros de 1 a 100?
*Solução:*São escritos 9 números de 1 algarismo, 90 números de 2 algarismos (de 10 a 99) e 1 número de 3 algarismos. Logo, o total de algarismos escritos é $9+2\times 90+3 = 192$.

4) João e Isabel lançam, cada um, um dado.

(a) Quantas são as possíveis combinações de resultado?
Solução: Cada um dos dois jogadores pode obter qualquer dos números de 1 a 6. Logo, o número de possíveis combinações de resultados é $6\times 6 = 36$.

(b) Quantas são as possíveis somas que eles podem obter?
Solução: A soma pode ser qualquer número inteiro de $1+1=2$ até $6+6=12$. Há, portanto, 11 somas possíveis.

5) Cada dígito de uma calculadora é mostrado no visor acendendo filamentos dispostos como mostra a figura a seguir. Quantos símbolos diferentes podem ser representados? (Não inclua o caso em que nenhum filamento é aceso).

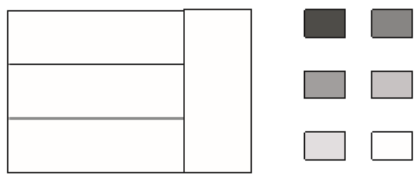


Solução: São 7 filamentos. Para cada um , há duas possibilidades ((aceso ou apagado). Logo, o número total de configurações possíveis é

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7 = 128$$

. Excluindo aquela em que estão todos apagados, obtemos 127 símbolos diferentes.

6) Para pintar a bandeira abaixo estão disponíveis as seis cores dadas, sendo que regiões adjacentes devem ser pintadas de cores diferentes.



(a) Qual é o número mínimo de cores a serem usadas?
Solução: São necessárias pelo menos 3 cores.

(b) De quantos modos a bandeira pode ser pintada?
Solução: A faixa vertical pode ser pintada de 6 modos. Pintando a faixa vertical de cima para baixo, temos que a primeira pode ser pintada de 5 modos (não pode usar a cor da faixa vertical), a segunda de 4 (não pode usar a cor da faixa vertical e a da primeira faixa horizontal) e a terceira também de 4 (não pode usar a cor da faixa vertical e a da segunda faixa horizontal). Logo, o número total de bandeiras é

$$6 \times 5 \times 4 \times 4 = 480$$

.

7) Dispomos de 5 cores distintas. De quantos modos podemos colorir os quatro quadrantes de um círculo, cada quadrante com uma só cor, se quadrantes cuja fronteira é uma linha não podem receber a mesma cor?
Solução: Vamos contar separadamente os casos em que os quadrantes 1 e 3 têm cores iguais e cores diferentes. Pondo cores iguais nos quadrantes 1 e 3, temos $5 \times 4 \times 4 = 80$ possibilidades, pois há 5 modos de escolher a cor única para os quadrantes 1 e 3, há 4 modos de escolher a cor do quadrante 2 e há 4 modos

de escolher a cor do quadrante 4. Pondo cores diferentes nos quadrantes 1 e 3, há $5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180$ possibilidades, pois há 5 modos de escolher a cor para o quadrante 1, há 4 modos de escolher a cor do quadrante 3, há 3 modos de escolher a cor do quadrante 2 e há 3 modos de escolher a cor do quadrante 4. A resposta é $80 + 180 = 260$.

8) Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão? Em quantos destes gabaritos a letra A aparece exatamente uma vez? Em quantos a letra A não aparece?
Solução: Há 5^{10} gabaritos possíveis. Para ter a letra A aparecendo exatamente uma vez, devemos escolher a questão em que ela aparece (10 possibilidades) e, a seguir, escolher a alternativa das demais (4 para cada, para um total de 4^9). Logo, o número total de possibilidades é 10×4^9. Se a letra A não aparece, temos somente 4 possibilidades de escolha para cada questão, para um total de 410 possibilidades.

9) Liste todos os subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$. Quantos são eles? De modo geral, quantos são os subconjuntos de um conjunto que tem n elementos?
Solução: Os subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ são $8 : \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$. De um modo geral, um subconjunto de um conjunto de n elementos é formado decidindo se cada elemento entra ou não no subconjunto. Para cada elemento há 2 possibilidades; o número total de possibilidades é 2^n.

10) quantos modos 3 pesoas podem se sentar em 5 cadeiras em fila?
Solução: A primeira pessoa pode escolher sua cadeira de 5 modos; a segunda, de 4; a terceira, de 3. A resposta é $5 \times 4 \times 3 = 60$.

11) De quantos modos 5 homens e 5 mulheres podem se sentar em 5 bancos de 2 lugares, se em cada banco deve haver um homem e uma mulher?
Solução: A primeira mulher pode escolher sua posição de 10 modos. A segunda, de 8 modos. As outras, de 6, de 4 e de 2 modos. O primeiro homem, de 5 modos. Os demais, de 4, de 3, de 2 e de 1. A resposta é $10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 460800$.

12) De quantos modos podemos colocar 2 reis diferentes em casas não adjacentes de um tabuleiro 8×8? E se os reis fossem iguais?
Solução: O tabuleiro de 64 casas possui 4 casas de canto (vértices), 24 casas laterais que não são vértices e 36 casas centrais. Cada casa de canto possui 3 casas adjacentes; cada lateral possui 5 casas adjacentes e cada central possui 8 casas adjacentes. Vamos contar separadamente os casos que ocorrem conforme o rei negro ocupe uma casa de canto, lateral ou central. Se o rei negro ocupar uma casa de canto, haverá 4 posições para o rei negro e 60 posições para o rei branco, pois das 64 casas do tabuleiro uma estará ocupada, e as 3 a ela adjacentes não poderão ser ocupadas pelo rei branco. Haverá, portanto, $4 \times 60 = 240$ modos de dispor os reis.
Se o rei negro ocupar uma casa lateral que não seja de canto, haverá 24 posições para o rei negro e 58 posições para o rei branco, pois das 64 casas do tabuleiro uma estará ocupada e as 5 a ela adjacentes não poderão ser ocupadas pelo rei branco. Haverá, portanto, $24 \times 58 = 1392$ modos de dispor os reis.
Se o rei negro ocupar uma casa central, haverá 36 posições para o rei negro e

55 posições para o rei branco, pois das 64 casas do tabuleiro uma estará ocupada, e as 8 a ela adjacentes não poderão ser ocupadas pelo rei branco. Haverá, portanto, $36 \times 55 = 1980$ modos de dispor os reis. Portanto, a resposta é $240 + 1392 + 1980 = 3612$.
Se os reis fossem iguais, a resposta seria a metade da resposta anterior, 1806.

13) De quantos modos podemos formar uma palavra de 5 letras de um alfabeto de 26 letras, se a letra A deve figurar na palavra mas não pode ser a primeira letra da palavra? E se a palavra devesse ter letras distintas?
Solução: Note que no caso em que são permitidas repetições, a condição de a letra A figurar na palavra é terrível, pois ela pode figurar uma só vez, ou duas etc ... Por isso, é melhor contar todas as palavras do alfabeto e diminuir as que não têm A e as que começam por A. A resposta é $26^5 - 25^5 - 26^4 = 1658775$.
No caso sem repetição, pode-se contar diretamente: há 4 modos de escolher a posição do A, 25 modos de escolher a letra da primeira casa restante, 24 para a segunda casa restante etc. A resposta é $4 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 1214400$.
Pode-se também repetir o raciocínio do caso com repetição:

$$26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 - 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 - 1 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 1214400$$

.

14) As placas dos veículos são formadas por três letras (de um alfabeto de 26) seguidas por 4 algarismos. Quantas placas poderão ser formadas?
Solução: Há 26 modos de escolher cada letra e 10 modos de escolher cada algarismo. A resposta é $263 \times 104 = 175760000$.

15) Um vagão do metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem se sentar de frente, 3 preferem se sentar de costas, e os demais não têm preferência. De quantos modos eles podem se sentar, respeitadas as preferências?
Solução: Os passageiros que preferem se sentar de frente podem fazê-lo de $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ modos; os que preferem se sentar de costas podem fazê-lo de$5 \times 4 \times 3 = 60$ modos; os demais podem se colocar nos lugares restantes de $3 \times 2 \times 1 = 6$ modos. A resposta é $120 \times 60 \times 6 = 43200$.

16) Escrevem-se os inteiros de 1 até 2222.

(a) Quantas vezes o algarismo 0 é escrito?
Solução: O algarismo 0 aparece nas unidades 222 vezes, nos números $10, 20, 30, ..., 2200$. Aparece nas dezenas 220 vezes, nos números $10x, 20x, ..., 220x$. Aparece nas centenas 200 vezes, nos números $10xy$ e $20xy$. A resposta é $222 + 220 + 200 = 642$.

(b) Em quantos números aparece o algarismo 0?
Solução: Contamos os números com algum algarismo igual a 0, descontando do cálculo anterior o que houver sido contado indevidamente. O 0 aparece nas unidades 222 vezes, nos números $10, 20, 30, ..., 2200$. Das 220 vezes em que aparece nas dezenas devemos descontar o total dos números do conjunto
$$\{10x, 20x, ..., 220x; x = 0\},$$

que é 22. Das 200 vezes em que aparece nas centenas devemos descontar o total dos números do conjunto $\{10xy, 20xy; x = 0ouy = 0\}$, que é $2 \times (9+9+1) = 38$. A resposta é

$$222 + (220 - 22) + (200 - 38) = 222 + 198 + 162 = 582.$$

Outra solução: O algarismo 0 aparece nas unidades 222 vezes, nos números $10, 20, 30, ..., 2200$. Faltam os números dos conjuntos $\{10x, 20x, ..., 220x; x \neq 0\}$ e $\{10xy, 20xy; x \neq 0$ e $y \neq 0\}$. O primeiro tem $22 \times 9 = 198$ números, e o segundo, $2 \times 9 \times 9 = 162$ números. A resposta é $222 + 198 + 162 = 582$

17) Quantos são os inteiros positivos de 4 algarismos nos quais o algarismo 5 figura?
Solução: O mais simples é fazer todos os números menos aqueles em que o 5 não figura. A resposta é $9 \times 10 \times 10 \times 10 - 8 \times 9 \times 9 \times 9 = 3168$.

18) Em uma banca há 5 exemplares iguais da *Veja*, 6 exemplares iguais da *Época* e 4 exemplares iguais da *Isto É*. Quantas coleções não vazias de revistas dessa banca podem ser formadas?
Solução: Para formar uma coleção, você deve decidir quantas *Veja* farão parte da coleção etc. A quantidade de revistas *Veja* pode ser escolhida de 6 modos (0,1,2,3,4,5). A de *Época*, de 7 modos. A de *Isto É*, de 5 modos. O número de coleções é $6 \times 7 \times 5 = 210$. O número de coleções não vazias é 209.

19) Tendo 4 cores disponíveis, de quantos modos se pode pintar uma bandeira com 3 listras, tendo listras adjacentes de cores distintas? Um aluno deu a seguinte solução: `Primeiro, eu vou pintar as listras extremas; para cada uma, eu tenho 4 possibilidades de escolha. Depois, eu pinto a listra central; como ela tem que ter cor diferente das duas vizinhas, eu posso escolher sua cor de apenas 2 modos. Logo, o número total de modos de pintar a bandeira é$4 \times 4 \times 2 = 32$". A solução está certa ou errada? Se estiver errada, onde está o erro?

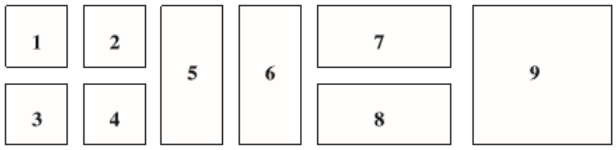
Solução: A solução está errada. É possível que a mesma cor tenha sido escolhida para as faixas extremas. Neste caso, o número de possibilidades de escolha para a cor da faixa central é 3, e não 2. Logo, para esta ordem de pintura não é possível aplicar diretamente o Princípio Multiplicativo.

20) Com 5 homens e 5 mulheres, de quantos modos se pode formar um casal? Este problema foi resolvido por um aluno do modo a seguir: "A primeira pessoa do casal pode ser escolhida de 10 modos, pois ela pode ser homem ou mulher. Escolhida a primeira pessoa, a segunda pessoa só poderá ser escolhida de 5 modos, pois deve ser de sexo diferente do da primeira pessoa. Há, portanto,$10 \times 5 = 50$ modos de formar um casal.` A solução está certa ou errada? Se estiver errada, onde está o erro?
Solução: O casal João e Maria foi considerado diferente do casal Maria e João. Isso é devido ao fato de termos trabalhado com o conceito de primeira pessoa do casal. Por isso a resposta encontrada é o dobro da resposta real.

21) Cada peça de um dominó apresenta um par de números de 0 a 6, não necessariamente distintos. Quantas são essas peças? E se os números forem de 0 a 8?

Solução: Há dois tipos de peças: as formadas por números iguais (que são 7: de $0-0$ até $6-6$) e as formadas por um par de números distintos. Destas, há $7 \times \frac{6}{2} = 21$ peças. O total é 28. Se os números forem até 8, o número de peças é $9 + 9 \times \frac{8}{2} = 45$.

22) Quantos retângulos há formados por casas adjacentes em um tabuleiro de xadrez 8×8? Por exemplo, em um tabuleiro 2×2 há 9 retângulos, como mostra a figura abaixo.



Solução: Cada retângulo corresponde a escolher 2 linhas e 2 colunas entre as 9 linhas e colunas de separação das casas. As duas linhas podem ser escolhidas de $9 \times \frac{8}{2} = 36$ modos. O número de possibilidades para as colunas é o mesmo. Logo, o número total de retângulos é $36 \times 36 = 1296$.