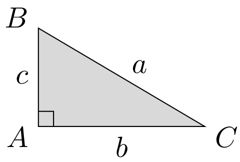
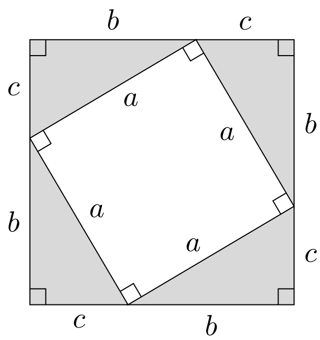
Considere um triângulo retângulo ABC com ângulo reto no vértice A. Vamos escrever os comprimentos dos lados deste triângulo como $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$. Lembre-se de que os lados de um triângulo retângulo recebem nomes: os **catetos** são os lados AC e AB que chegam no vértice do ângulo reto e a **hipotenusa** é o lado BC que não passa pelo vértice do ângulo reto.



Teorema de Pitágoras: *Se um triângulo retângulo possui hipotenusa de medida a e catetos de medidas b e c, então $a^2 = b^2 + c^2$. Em palavras, o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos.*

Existem várias demonstrações diferentes deste teorema. A demonstração que vamos explicar começa com a observação de que com quatro cópias do triângulo retângulo de catetos b e c é possível montar um quadrado de lado $b + c$ como está indicado na figura a seguir.

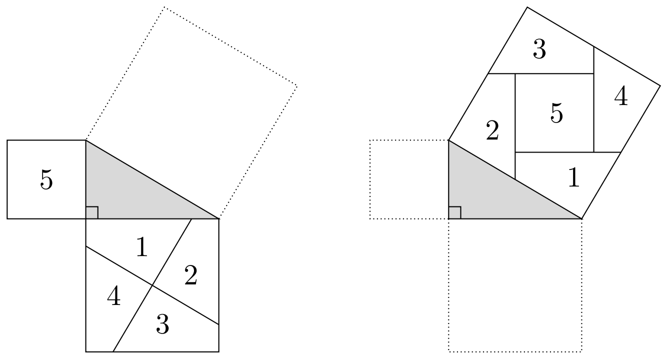


Agora vamos calcular a área deste quadrado de duas maneiras diferentes. Por um lado ele é um quadrado de lado $b+c$. Logo a sua área é igual a $(b+c)^2$. Por outro lado este quadrado é a união de um quadrado de lado a com quatro triângulos retângulos de catetos b e c. Somando as áreas destas figuras, vemos que a área do quadrado de lado $b+c$ também pode ser expressa por $4\cdot\dfrac{bc}{2}+a^2$. Igualando as duas expressões obtidas para a área do quadrado de lado $b+c$ obtemos a igualdade $4\cdot\dfrac{bc}{2}+a^2=(b+c)^2$. Desenvolvendo e simplificando obtemos

$$4\cdot\frac{bc}{2}+a^2=(b+c)^2 \quad\Rightarrow\quad 2bc+a^2=b^2+2bc+c^2 \quad\Rightarrow\quad a^2=b^2+c^2\ .$$

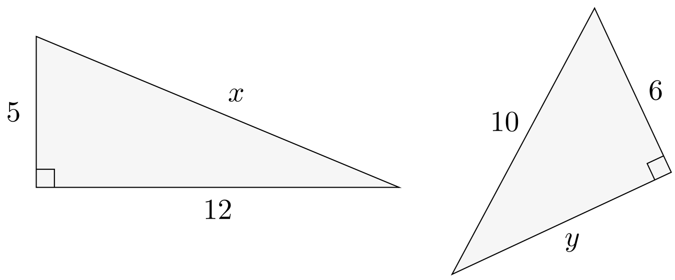
A última igualdade $a^2=b^2+c^2$ é exatamente a relação que queríamos obter.

Podemos interpretar geometricamente o Teorema de Pitágoras do seguinte modo: se são construídos quadrados sobre os três lados de um triângulo retângulo, então *"a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual a área do quadrado construído sobre a hipotenusa."* A figura a seguir (devida a Henry Perigal) mostra que é possível dividir os quadrados construídos sobre os catetos em 5 pedaços que podem ser reorganizados para montar o quadrado construído sobre a hipotenusa. Desta figura vemos exatamente esta interpretação para o Teorema de Pitágoras: a soma b^2+c^2 das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual a área a^2 do quadrado construído sobre a hipotenusa.



O Teorema de Pitágoras nos fornece uma relação entre os três lados de um triângulo retângulo. Isto implica que se são conhecidos dois dos lados de um triângulo retângulo então é possível calcular o comprimento do terceiro lado. Vejamos isso em alguns exemplos.

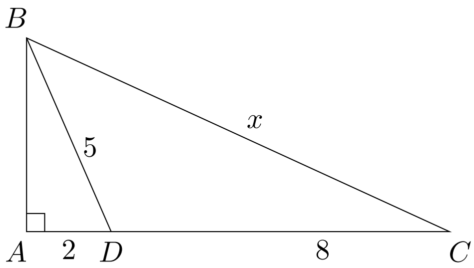
Exemplo 1: Nas figuras a seguir vemos dois triângulos retângulos. Utilizando os comprimentos dos lados dados nas figuras, calcule os comprimentos dos lados x e y.



Solução. Na figura da esquerda vemos um triângulo retângulo de hipotenusa x e de catetos 5 e 12. Aplicando o Teorema de Pitágoras obtemos a relação $x^2 = 5^2 + 12^2$. Logo $x^2 = 169$ e portanto $x = \sqrt{169} = 13$.

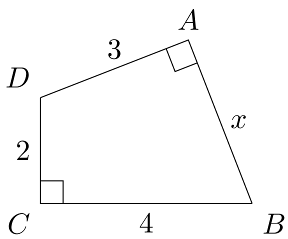
Na figura da direita vemos um triângulo retângulo de hipotenusa 10 e de catetos y e 6. Aplicando o Teorema de Pitágoras obtemos $10^2 = y^2 + 6^2$. Daí $100 = y^2 + 36 \Rightarrow y^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow y = \sqrt{64} = 8$.

Exemplo 2: Na figura a seguir os pontos A, D e C estão alinhados. Determine o comprimento x da hipotenusa do triângulo retângulo ABC.



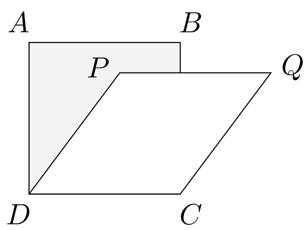
Solução. Vamos chamar de y o comprimento do segmento AB. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABD obtemos $5^2 = y^2 + 2^2$. Daí, $25 = y^2 + 4$ e portanto $y^2 = 25 - 4 = 21$. Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, obtemos $x^2 = y^2 + 10^2$. Logo $x^2 = 21 + 100 \Rightarrow x^2 = 121 \Rightarrow x = \sqrt{121} = 11$.

Exemplo 3: Na figura a seguir, o quadrilátero $ABCD$ possui dois ângulos retos. Determine o comprimento do lado AB.

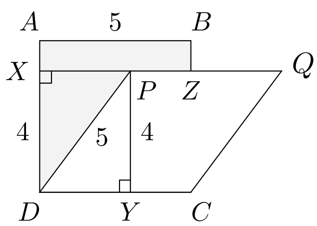


Solução. Trace o segmento BD e seja y o comprimento deste segmento. Observe que o quadrilátero $ABCD$ é a união de dois triângulos retângulos BCD e ABD. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo BCD obtemos $y^2 = 2^2 + 4^2$, ou seja, $y^2 = 20$. Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABD, obtemos $y^2 = x^2 + 3^2$. Daí, $x^2 = y^2 - 9 = 20 - 9 = 11$ e portanto $x = \sqrt{11}$.

Exemplo 4: Na figura plana a seguir, sobre o quadrado cinza $ABCD$ com 25 cm^2 de área foi desenhado um losango branco $PQCD$ com 20 cm^2 de área. Determine a área cinza do quadrado que não ficou encoberta pelo losango.



Solução. Prolongue o segmento PQ até ele intersectar o segmento AD no ponto X e seja Y o ponto do segmento DC tal que PY é uma altura do losango $PQCD$. Seja Z o ponto de interseção dos segmentos PQ e BC. Observe que a figura sombreada é formada pelo retângulo $ABZX$ e pelo triângulo retângulo DPX. Para calcular a área desta figura vamos somar as áreas deste retângulo e deste triângulo retângulo.

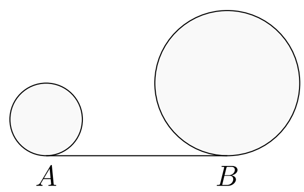


O losango tem base $\overline{DC} = 5$ cm, tem altura PY, e sua área é igual a 20 cm^2. Como a área de um losango é igual ao produto da base pela altura, temos que $\overline{DC} \times \overline{PY} = 20$. Daí $5 \times \overline{PY} = 20$ donde $\overline{PY} = 4$ cm. Como $\overline{XD} = \overline{PY} = 4$ cm, vemos que $\overline{XA} = 5 - 4 = 1$ cm.

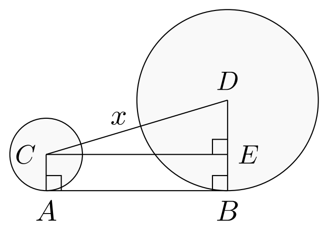
Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo DPX de cateto $\overline{XD} = 4$ cm e de hipotenusa $\overline{DP} = 5$ cm, concluímos que $\overline{XP} = 3$ cm.

Daí o retângulo $ABZX$ tem base $\overline{XZ} = 5$ cm e tem altura $\overline{XA} = 1$ cm. A área desse retângulo é então igual a $5 \times 1 = 5$ cm^2. Já o triângulo retângulo DPX tem base $\overline{XP} = 3$ cm e tem altura $\overline{XD} = 4$ cm. Sua área é então igual a $\dfrac{3 \times 4}{2} = 6$ cm^2. Finalmente, a área desejada da região cinza é igual a $5 + 6 = 11$ cm^2.

Exemplo 5: Na figura a seguir, AB é um segmento tangente às circunferências de raios 2 cm e 5 cm. Se o comprimento do segmento AB é igual a 10 cm, determine a distância entre os centros das circunferências.



Solução. Sejam C e D os centros das circunferências. Desenhe os segmentos CA e DB e desenhe o segmento CE paralelo a AB, como na figura a seguir.

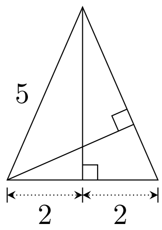


Nesta figura temos que $\overline{CA} = 2\ cm$ e $\overline{DB} = 5$ cm, pois estes dois segmentos são raios das circunferências. Além disso, $\overline{CE} = \overline{AB} = 10$ cm e $\overline{EB} = \overline{CA} = 2$ cm, pois $ABEC$ é um retângulo. Daí $\overline{DE} = \overline{DB} - \overline{EB} = 5 - 2 = 3$ cm. Se $x = \overline{CD}$, pelo Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo retângulo CDE, obtemos

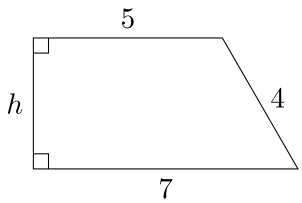
$$x^2 = 10^2 + 3^2 \ \Rightarrow \ x^2 = 109 \ \Rightarrow x = \sqrt{109} \text{ cm}.$$

Exercícios:

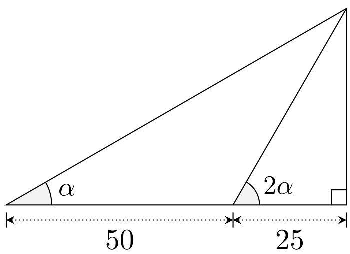
1. Calcule o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 10.
2. Calcule o comprimento da diagonal de um retângulo 6×8.
3. Um retângulo tem base de 9 cm e tem diagonal de 15 cm. Determine a altura deste retângulo.
4. Um quadrado tem diagonal com 8 cm de comprimento. Qual é a área deste quadrado?
5. Para o triângulo isósceles de lados 5, 5 e 4:
   (a) Determine a altura relativa à base de comprimento 4.
   (b) Determine a área do triângulo.
   (c) Utilizando o fato de que a área de um triângulo é a metade da base vezes a altura, determine a altura relativa a base de comprimento 5.



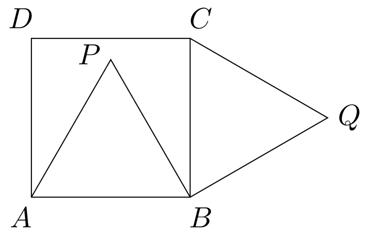
6. Determine a altura e a área do trapézio da figura a seguir.



7. Uma pessoa a 25 metros de um prédio vertical enxerga o topo do prédio segundo certo ângulo. Afastando-se do prédio perpendicularmente, esta pessoa caminha 50 metros e passa a avistar o topo do prédio com a metade do ângulo anterior. Qual é a altura do prédio?

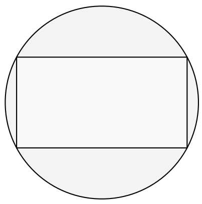


8. Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado de lado 1. Os triângulos ABP e BQC são triângulos equiláteros. Calcule o comprimento do segmento PQ.

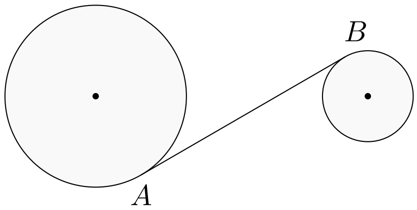


9. Um triângulo ABC está inscrito em uma circunferência com 5 cm de raio de modo que o lado AB é um diâmetro. Se $\overline{AC} = 8$ cm, determine o comprimento do lado BC.

10. Na figura a seguir um retângulo 15×8 está inscrito em uma circunferência. Determine o raio desta circunferência.

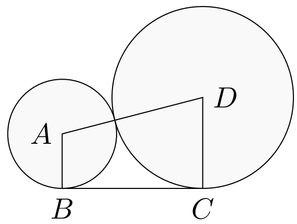


11. Na figura a seguir, uma circunferência tem raio 4 e a outra tem raio 2. Se a distância entre os centros é igual a 12, determine o comprimento do segmento AB, tangente comum às duas circunferências.

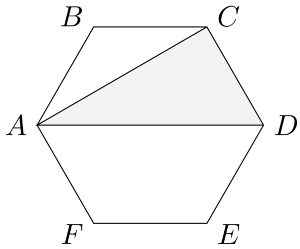


12. Na figura a seguir, a circunferência de centro em A tem raio 3 e a circunferência de centro em D tem raio 5. Se uma circunferência

é tangente a outra e se BC é um segmento tangente a estas duas circunferências, determine os comprimentos dos segmentos AD e BC.



13. Na figura a seguir, $ABCDEF$ é um hexágono regular de lado 2 cm.



(a) Qual é a medida do ângulo $A\hat{C}D$?

(b) Qual é o comprimento da diagonal AD?

(c) Calcule o comprimento da diagonal AC.

(d) Calcule a área do triângulo ACD.

8.3 Visualização de figuras tridimensionais

Apesar de muitos objetos tridimensionais terem componentes que são figuras planas, como as suas faces, somente o estudo da Geometria Plana não garante um pleno entendimento da Geometria Espacial, das suas