Representação dos Naturais

O Sitema Decimal

Os números naturais foram representados ao longo da história de vários modos distintos. O modo universalmente utilizado na atualidade é a representação decimal posicional. Esse sistema, variante do sistema sexagesimal utilizado pelos babilônios há cerca de 1 700 anos antes de Cristo, foi desenvolvido na China e na Índia. Nesse sistema, todo número natural é representado por uma sequência formada pelos algarismos

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Por serem 10 esses algarismos, o sistema é chamado de decimal. O sistema é também dito posicional, pois cada algarismo, além de seu valor intrínseco, possui um peso que lhe é atribuído em função de sua posição dentro da sequência. Esse peso é uma potência de 10 e varia do seguinte modo:

O algarismo da extrema direita tem peso $10^0 = 1$; o seguinte, sempre da direita para a esquerda, tem peso $10^1 = 10$; o seguinte tem peso $10^2 = 100$; o seguinte tem peso $10^3 = 1000$ etc.

Assim, o número 1 458, no sistema decimal representa o número

$$1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 5 \times 10 + 8.$$

Os zeros à esquerda em um número são irrelevantes, pois por exemplo,

$$0231 = 0 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1 = 2 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1 = 231.$$

Cada algarismo de um número possui uma ordem, contada da direita para a esquerda. Assim, no exemplo acima, o 8 é de primeira ordem, o 5 de segunda ordem, o 4 de terceira ordem e o 1 de quarta ordem.

Cada três ordens, também contadas da direita para a esquerda, constituem uma classe. As classes são usualmente separadas por um ponto. A seguir, damos os nomes das primeiras classes e ordens:

$$\text{Classe das Unidades} \begin{cases} \text{unidades primeira ordem} \\ \text{dezenas segunda ordem} \\ \text{centenas terceira ordem} \end{cases}$$

$$\text{Classe do Milhar} \begin{cases} \text{unidades de milhar quarta ordem} \\ \text{dezenas de milhar quinta ordem} \\ \text{centenas de milhar sexta ordem} \end{cases}$$

$$\text{Classe do Milhão} \begin{cases} \text{unidades de milhão sétima ordem} \\ \text{dezenas de milhão oitava ordem} \\ \text{centenas de milhão nona ordem} \end{cases}$$

Exercício 1: Determine a soma de todos os múltiplos de 6 que se escrevem no sistema decimal com dois algarismos.

Solução: O primeiro múltiplo de 6 com dois algarismos é o 12, pois abaixo dele só há o próprio 6. O maior múltiplo de 6 com dois algarismos é o 96, pois, se dividirmos 99 por 6, encontramos 16 com resto diferente de zero. Como $6 \times 16 = 96$, ele é o maior múltiplo de 6 com dois algarismos. O próximo já é o 102, que possui 3 algarismos.

A partir daqui, vamos tratar a questão como um simples problema de PA.
$a_1 = 12$
$r = 6$
$a_n = a_1 + (n-1) \times r \Rightarrow 96 = 12 + (n-1) \times 6 \Rightarrow n - 1 = \dfrac{84}{6} = 14 \Rightarrow n = 15$

$S_n = \frac{(a_1+a_n)\times n}{2}$

$S_{15} = \frac{(12+96)\times 15}{2} = \frac{(108)\times 15}{2} = 54 \times 15 = 810$

Exercício 2: Fixe três algarismos distintos e diferentes de zero. Forme os seis números com dois algarismos distintos tomados dentre os algarismos fixados. Mostre que a soma desses números é igual a 22 vezes a soma dos três algarismos fixados.

Solução: Como este problema pode ser um pouco mais complicado, sugerimos que você comece com um exemplo numérico. Por exemplo,com os algarismos 1, 2 e 3 podemos formar os números 12, 13, 21, 23,31 e 32. A soma destes números é igual a 132, e a soma dos algarismos dados é igual a $1 + 2 + 3 = 6$. Observe que o resultado enunciado no exercício é verdadeiro pois $22 \times 6 = 132$.

Agora vamos para o caso geral. Suponhamos que os algarismos escolhidos são a, b e c. Com estes algarismos formamos os seguintes números de 2 algarismos:

$$ab = 10a + b$$

$$ac = 10a + c$$

$$ba = 10b + a$$

$$bc = 10b + c$$

$$ca = 10c + a$$

$$cb = 10c + b$$

Somando estes números, somando os lados esquerdos e os lados direitos destas igualdades, obtemos:

$$ab + ac + ba + bc + ca + cb = 22a + 22b + 22c = 22(a + b + c)$$

Exercício 3: Qual é o menor número de dois algarismos? E qual é o maior? Quantos são os números de dois algarismos? Quantos algarismos precisa-se para escrevê-los?
Solução: O menor número de dois algarismos é 10, o maior é 99,logo são 90

números de dois algarismos (do 10 ao 99). Como são 90 números de dois algarismos, basta multiplicar 90 por 2 para obtermos o número de algarismos que precisa para escrevê-los, ou seja $90 \times 2 = 180$.

Exercício 4: Quantos algarismos são usados para numerar um livro de 300 páginas?

- Das páginas 1 até 9 são utilizados 9 algarismos.

- Das páginas 10 até 99 existem 90 números com dois algarismos, totalizando aqui $2 \times 90 = 180$ algarismos.

- Para numerar as páginas de 100 a 300 são necessários 201 números de três algarismos cada, totalizando $3 \times 201 = 603$ algarismos.

Portanto para numerar as 300 páginas do livro são necessários $9+180+603 = 792$ algarismos.

Curiosidade: Existe uma fórmula interessante para descrever o número $Q(x)$ de algarismos necessários para escrever todos os números naturais de 0 a x, no sistema decimal:

$$Q(x) = n(x+1) - (10^{n-1} + ... + 10),$$

onde n é o número de algarismos de x (cf. Revista do Professor de Matemática, n. 5, p. 32).

Critérios de Multiplicidade de 2, 5 e 10

Critérios de multiplicidade são alguma regras práticas para decidir se um dado número é múltiplo de algum outro prefixado.

A seguir, veremos alguns desses critérios.

Seja dado um número n escrito no sistema decimal como

$$n = n_r...n_1n_0 = n_r10^r + ... + n_110 + n_0.$$

Podemos então escrever

$$n = (n_r10^{r-1} + ... + n_1)10 + n_0,$$

onde n_0 é o algarismo das unidades de n.

Reciprocamente, se n é da forma $n = 10m+n_0$, onde n_0 é um dos algarismos de 0 a 9, então n_0 é o algarismo das unidades de n.

Exercício 5: Mostre que o algarismo das unidades de um quadrado perfeito, isto é, um número da forma a^2, onde a é um número natural, só pode ser 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.

Solução: Para provar isto, veja que qualquer número natural n pode ser expresso na forma $10B + A$, com A e B naturais, em que A é o seu algarismo das unidades . Se um número é um quadrado perfeito, ele é o quadrado de algum número natural, ou seja, é da forma n^2.

Como $10B^2 + 2AB$ é um número natural, $10(10B^2 + 2AB)$ é um número natural terminado em 0. Logo, $10(10B^2+2AB)$ não influi em nada no algarismo das unidades de n^2, e então este algarismo vai ser igual ao algarismo das unidades de A^2. Como A é algarismo das unidades de n, ele só pode assumir os valores 0, 1, 2, ..., ou 9. Assim, o algarismo das unidades de n^2 tem que ser o de $0^2, 1^2, 2^2, ..., ou9^2$. e o resultado disso para as unidades é 0, 1, 4, 5, 6, ou 9.

Critério de multiplicidade de 2.

Inicialmente, consideremos a tabela:

$$2 \times 0 = 0$$

$$2 \times 1 = 2$$

$$2 \times 2 = 4$$

$$2 \times 3 = 6$$

$$2 \times 4 = 8$$

$$2 \times 5 = 10 = 10 + 0$$

$$2 \times 6 = 12 = 10 + 2$$

$$2 \times 7 = 14 = 10 + 4$$

$$2 \times 8 = 16 = 10 + 6$$

$$2 \times 9 = 18 = 10 + 8$$

Note que todo número acima é um múltiplo de 10 somado com um dos números: 0, 2, 4, 6, ou 8.

Suponha agora que um dado número natural n seja par, ou seja,$n = 2m$, onde m é um número natural. Escrevendo m da forma $m'10 + m_0$, onde m_0 é o algarismo das unidades de m, temos

$$n = 2(m'10 + m_0) = 2m'10 + 2m_0.$$

Sendo $2m_0$ um dos números da tabela, temos que ele e um múltiplo de 10 somado com um dos numeros: 0, 2, 4, 6, ou 8. Logo, $n = 2m'10 + 2m_0$ e um multiplo de 10 somado com um dos numeros: 0, 2, 4, 6, ou 8, e, portanto, o seu algarismo das unidades e 0, 2, 4, 6, ou 8.

Juntando essas informações temos o seguinte resultado:

Teorema (Critério de Multiplicidade de 2)
Um número é múltiplo de 2 se, e somente se, o seu algarismo das unidades é par.

Critério de multiplicidade de 5 e de 10.

Seja n um número natural escrito na forma $n = 10m + n_0$, onde n_0 é o algarismo das unidades de n. Como $10m$ é múltiplo de 5 e de 10, temos que n é múltiplo de 5 ou de 10 se, e somente se, n_0 é múltiplo de 5 ou de 10, respectivamente. Isto ocorre se, e somente se, $n_0 = 0$ ou $n_0 = 5$, no primeiro caso; e $n_0 = 0$, no segundo. Assim, provamos o seguinte resultado:

Teorema (Critério de Multiplicidade de 5 ou de 10)
Um número é múltiplo de 5 se, e somente se, o seu algarismo das unidades for 0 ou 5. Um número é múltiplo de 10 se, e somente se,o seu algarismo das unidades for 0.

Exercício 6: Determine se é múltiplo de 2, de 5 ou de 10 cada número a seguir: 17, 22, 25, 28, 30, 35 420, 523 475.

Solução

- 17 é um número primo, logo não é múltiplo de 2, de 5 nem de 10.

- 30 e 35420 é múltiplo de 2, de 5 e de 10.

- 25 e 523475 é múltiplo de 5.

- 22 e 28 é múltiplo de 2.

Critérios de Multiplicidade de 9 e de 3

Inicialmente note os seguintes fatos:
$10 - 1 = 9 = 1 \times 9$,
$10^2 - 1 = 100 - 1 = 99 = 11 \times 9$,
$10^3 - 1 = 1.000 - 1 = 999 = 111 \times 9$,
$10^4 - 1 = 10000 - 1 = 9999 = 1111 \times 9$.

Em geral, para n um número natural não nulo, temos

$$10^n - 1 = 11....1 \times 9.$$

Portanto, todos os números da forma $10^n - 1$ são múltiplos de 9 e também de 3, já que 9 é múltiplo de 3.

Seja dado agora um número n escrito no sistema decimal como

$$n = n_r...n_1n_0 = n_r10^r + ... + n_110 + n_0.$$

Subtraiamos a soma $n_r + ... + n_1 + n_0$, dos algarismos que compõem o número n, de ambos os lados da igualdade acima:

$$n - (n_r + ... + n_1 + n_0) = n_r10^r - n_r + ... + n_110 - n_1 + n_0 - n_0$$

$$n - (n_r + ... + n_1 + n_0) = (10^r - 1)n_r + ... + (10 - 1)n_1.$$

Note agora que a última expressão é sempre múltiplo de 9 (logo, de 3). Portanto temos que n é múltiplo de 9 ou de 3 se, e somente se, o número $n_r + ... + n_1 + n_0$ é múltiplo de 9 ou de3. Assim, obtemos o seguinte resultado:

Teorema (Critério de Multiplicidade de 9 ou de 3)
Um número $n = n_r...n_1n_0$ é múltiplo de 9 ou de 3 se, e somente se, o número $n_r + ... + n_1 + n_0$ for múltiplo de 9 ou de 3, respectivamente.

O teorema acima reduz o problema de saber se um dado número é múltiplo de 9 ou de 3 ao problema de saber se um outro número obtido a partir desse é múltiplo de 9 ou de 3. O que ganhamos com isto? Bem, o número $n_r+...+n_1+n_0$ é consideravelmente menor do que n e se ele ainda for grande podemos aplicar o teorema a ele obtendo um número ainda menor e assim, sucessivamente, até encontrar um número para o qual seja fácil decidir se é múltiplo de 9 ou de 3.

Por exemplo, dado o número 257985921, somando os seus algarismos obtemos $2 + 5 + 7 + 9 + 8 + 5 + 9 + 2 + 1 = 48$. Repetindo o mesmo procedimento para o número 48, obtemos $4 + 8 = 12$, o qual é múltiplo de 3 mas não de 9. Logo, o número dado inicialmente é múltiplo de 3, mas não múltiplo de 9.

Exercício 7: Determine se é múltiplo de 3 ou de 9 cada um dos números a seguir:

$$108, 111, 225, 328, 930, 35424, 523476.$$

Solução:

- 328 não é múltiplo de 3 nem de 9.

- 111 e 930 é múltiplo de 3.

- 108, 225, 35424 e 523476 é múltiplo de 3 e de 9.