

**OBMEP NA ESCOLA – 2018**  
**N2 – CICLO 5 – ENCONTRO 1**

Assuntos a serem abordados:

- Explorando o uso de “simetrias” na resolução de problemas.
- Explorando a inserção de “ambientes recreativos” ao processo de ensino-aprendizagem.

As referências que seguem serão utilizadas ao longo do primeiro encontro presente nesse ciclo:

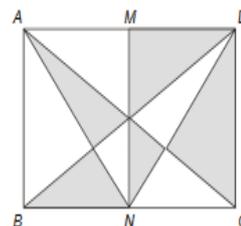
- Dimitri Fomim, Sergey Genkin e Ilia Itenberg, *Círculos Matemáticos – A experiência russa*, IMPA, 2010.
- Sergey Dorichenko, *Círculo Matemático – Problemas Semana a Semana*, IMPA, 2016.
- Bruno Holanda e Emiliano Chagas, *Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra*, IMPA, 2018.
- Banco de Questões da OBMEP, IMPA, números diversos.  
<http://www.obmep.org.br/banco.htm>

**Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA – N2 – Ciclo 5 – Encontro 1**  
**Enunciados**

**Exercício 1.**

No retângulo  $ABCD$  da figura,  $M$  e  $N$  são os pontos médios dos lados  $AD$  e  $BC$ .

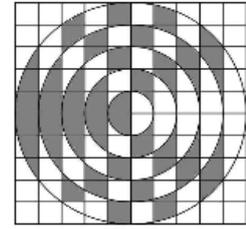
Qual é a razão entre a área da parte sombreada e a área do retângulo  $ABCD$ ?



**Exercício 2.**

Na malha quadriculada a seguir, todas as circunferências têm o mesmo centro. Pode-se concluir que a área da região cinza destacada é igual a

- (a) dois quintos da área do círculo maior;
- (b) três sétimos da área do círculo maior;
- (c) metade da área do círculo maior;
- (d) quatro sétimos da área do círculo maior;
- (e) três quintos da área do círculo maior.

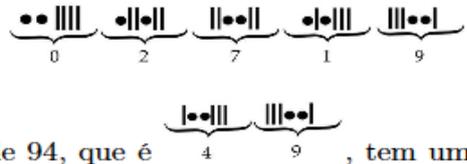


**Exercício 3.**

**Código Postal** – Para fazer a separação em regiões da correspondência que deve ser entregue, um serviço postal indica sobre os envelopes um código postal com uma série de cinco blocos de pontos e bastões, que podem ser lidos por um leitor ótico. Os algarismos são codificados como segue.

0	••	5	• •
1	• •	6	•  •
2	•  •	7	••
3	•   •	8	• •
4	••	9	••

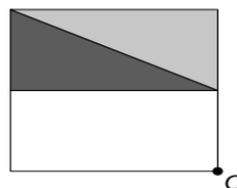
A leitura se faz da direita para a esquerda. Por exemplo: o código postal 91720 se escreve como ••|||•||•|||•||•|||•|||•||, ou seja,



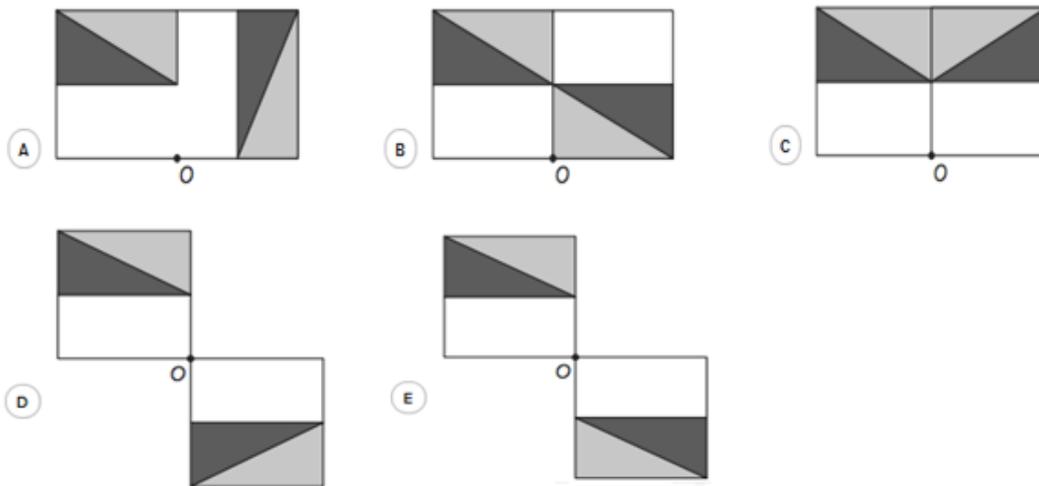
Note que a codificação de 94, que é  $\begin{matrix} |•|•|| & |||••| \\ \hline 4 & 9 \end{matrix}$ , tem um eixo vertical de simetria. Encontre os códigos entre 47000 e 47999 que apresentam um eixo vertical de simetria.

**Exercício 4.**

Um programa de edição de imagens possibilita transformar figuras em outras mais complexas. Deseja-se construir uma nova figura a partir da original. A nova figura deve apresentar simetria em relação ao ponto O.

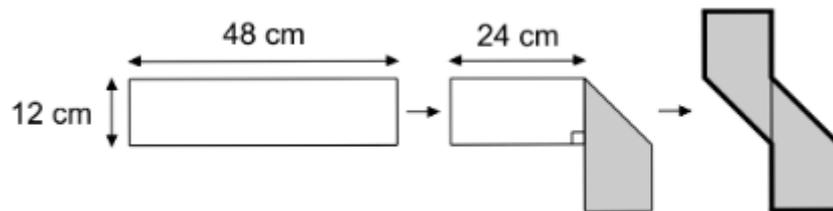


A imagem que representa a nova figura é:



**Exercício 5.**

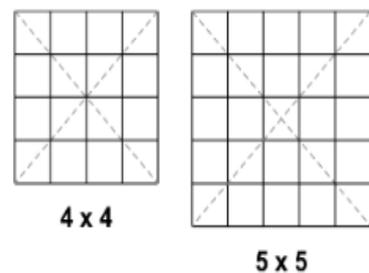
Uma tira retangular de cartolina, branca de um lado e cinza do outro, foi dobrada como na figura, formando um polígono de 8 lados. Qual é a área desse polígono?



**Exercício 6.**

Observe que no tabuleiro  $4 \times 4$  as duas diagonais cortam 8 quadradinhos. Já no tabuleiro  $5 \times 5$ , as duas diagonais cortam 9 quadradinhos. Em qual tabuleiro as diagonais cortam 77 quadradinhos?

- (A)  $35 \times 35$
- (B)  $36 \times 36$
- (C)  $37 \times 37$
- (D)  $38 \times 38$
- (E)  $39 \times 39$



### Exercício 7.

Após o período de férias do primeiro semestre, cinco meninas não estão totalmente de acordo sobre a data de uma prova de Matemática já marcada:

- Andrea diz que será em agosto, dia 16, segunda-feira;
- Daniela diz que será em agosto, dia 16, terça-feira;
- Fernanda diz que será em setembro, dia 17, terça-feira;
- Patrícia diz que será em agosto, dia 17, segunda-feira;
- Tatiane diz que será em setembro, dia 17, segunda-feira.

Sabendo que somente uma está certa, e as outras acertaram pelo menos uma das informações: o mês, o dia do mês ou o dia da semana. Quem está certa?

### Exercício 8.

Uma mãe estava lendo uma historinha aos seus filhos: Tia Geralda sabe que um de seus sobrinhos Ana, Bruno, Cecília, Daniela ou Eduardo comeu todos os biscoitos que ela havia feito. Ela também “sabe” que o culpado sempre mente e que os inocentes sempre dizem a verdade. Então, ela questionou seus sobrinhos sobre quem tinha comido os biscoitos:

- Bruno diz: “O culpado é Eduardo ou Daniela.”
- Eduardo diz: “O culpado é uma menina.”
- Por fim, Daniela diz: “Se Bruno é culpado, então Cecília é inocente.”

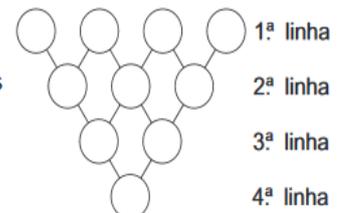
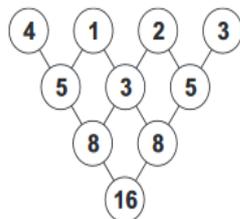
Vamos ajudar a tia Geralda a descobrir quem comeu os biscoitos, quem foi?

### Exercício 9.

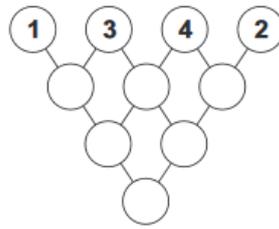
Um tabuleiro é formado por dez casas, ligadas como na figura ao lado. As casas desse tabuleiro devem ser preenchidas com números, seguindo as regras:

- na primeira linha, os números 1, 2, 3 e 4 devem aparecer sem repetição;
- nas demais linhas, o número em cada casa é a soma dos números nas duas casas da linha de cima que estão ligadas a ela.

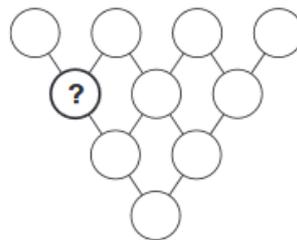
Observe abaixo uma forma de preencher completamente o tabuleiro.



a) Complete o tabuleiro abaixo seguindo as regras de preenchimento descritas acima:



b) Começando com o tabuleiro vazio, e seguindo as mesmas regras acima, quais são os números que podem aparecer na primeira casa da segunda linha?



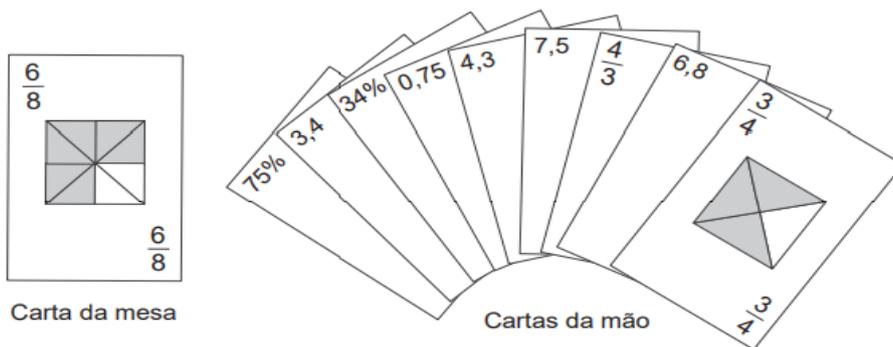
**Exercício 10.**

Vamos brincar com números (aqui o uso da calculadora pode ser interessante para a simulação de valores): o número 24 tem uma propriedade curiosa, precede um quadrado perfeito e o seu dobro tem a mesma propriedade, ou seja,  $24+1=25=5^2$  e  $(24 \times 2) + 1 = 49 = 7^2$ .

Qual é o próximo número natural que satisfaz essa propriedade?

**Exercício 11.**

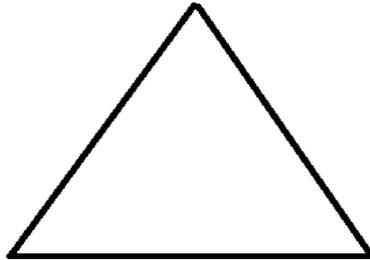
No contexto da matemática recreativa, utilizando diversos materiais didáticos para motivar seus alunos, uma professora organizou um jogo com um tipo de baralho modificado. No início do jogo, vira-se uma carta do baralho na mesa e cada jogador recebe em mãos nove cartas. Deseja-se formar pares de cartas, sendo a primeira carta a da mesa e a segunda, uma carta na mão do jogador, que tenha um valor equivalente àquele descrito na carta da mesa. O objetivo do jogo é verificar qual jogador consegue o maior número de pares. Iniciado o jogo, a carta virada na mesa e as cartas da mão de um jogador são como no esquema:



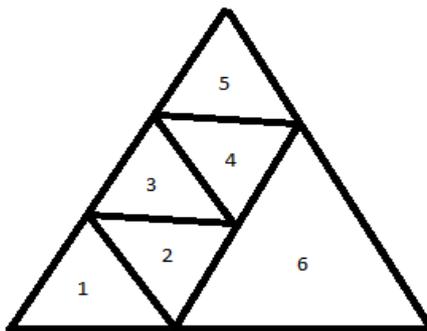
Segundo as regras do jogo, quantas cartas da mão desse jogador podem formar um par com a carta da mesa?

**Exercício 12.**

Foram dados três triângulos equiláteros idênticos ao ilustrado na figura que segue:



Desejamos construir três quebra-cabeças, cortando esses triângulos em seis, sete ou oito triângulos equiláteros que não necessitam ser congruentes. Como exemplo, veja um esboço na figura que segue de um quebra-cabeça com seis triângulos como desejado:



Faça a construção dos quebra-cabeças com 7 e 8 triângulos equiláteros.



Assuntos a serem abordados:

- Explorando o uso de “padrões” na resolução de problemas.
- Explorando o “reconhecimento de representações numéricas ou geométricas” em problemas de localização.

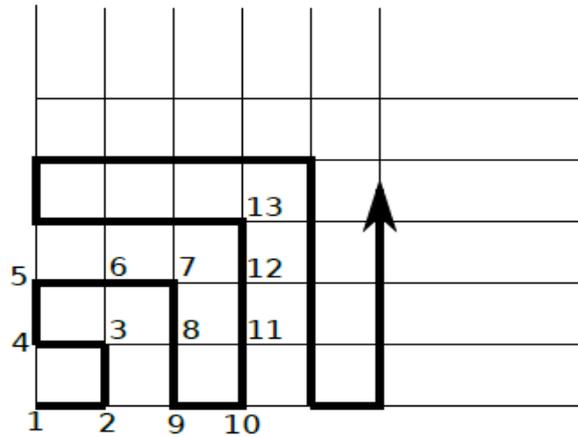
As referências que seguem serão utilizadas ao longo do segundo encontro presente nesse ciclo:

- Dimitri Fomim, Sergey Genkin e Ilia Itenberg, Círculos Matemáticos – A experiência russa, IMPA, 2010.
- Sergey Dorichenko, Círculo Matemático – Problemas Semana a Semana, IMPA, 2016.
- Bruno Holanda e Emiliano Chagas, Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra, IMPA, 2018.
- Banco de Questões da OBMEP, IMPA, números diversos.  
<http://www.obmep.org.br/banco.htm>

**Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA – N2 – ciclo 5 – Encontro 2**  
**ENUNCIADOS**

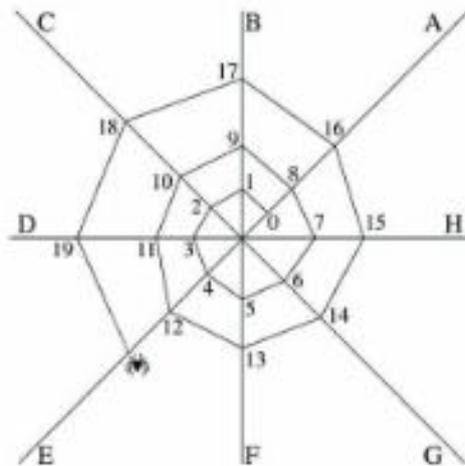
**Exercício 1.**

Os pontos da rede quadriculada a seguir são numerados seguindo o caminho poligonal sugerido no desenho. Considere o ponto correspondente ao número 2001. Quais são os números dos pontos situados imediatamente abaixo e imediatamente à esquerda dele?



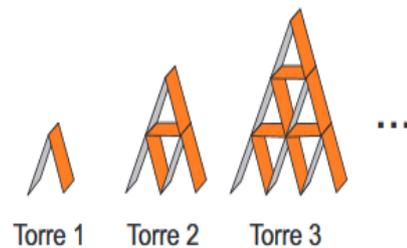
**Exercício 2.**

Na teia de aranha representada na figura que segue, A, B, C, D, E, F, G e H são os “fios” de apoio que uma aranha usa para construir sua teia. A aranha continua seu trabalho e, nesse sentido, sobre qual fio de apoio estará o número 118?



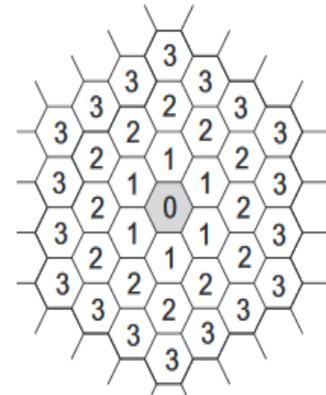
**Exercício 3.**

Janaína faz torres com cartões, seguindo o padrão da figura. A primeira torre foi feita com 2 cartões, a segunda com 7, a terceira com 15 e assim por diante. Quantos cartões ela deve acrescentar à décima torre para obter a décima primeira?



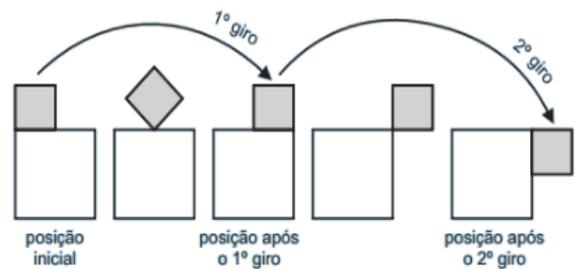
**Exercício 4.**

Na malha hexagonal, a casa central recebeu o número 0 e as casas vizinhas a ela receberam o número 1. Em seguida, as casas vizinhas às de número 1 receberam o número 2 e assim sucessivamente, como na figura. Quantas casas receberam o número 6?

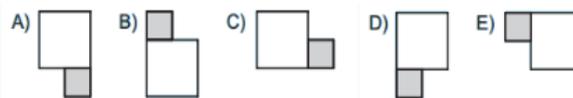


**Exercício 5.**

Um quadrado de lado 1 *cm* roda em torno de um quadrado de lado 2 *cm*, como na figura, partindo da posição inicial e completando um giro cada vez que um de seus lados fica apoiado em um lado do quadrado maior.

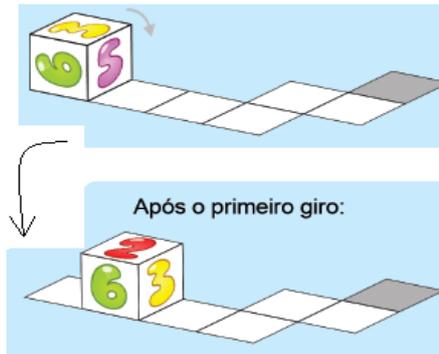


Qual das figuras a seguir representa a posição dos dois quadrados após o 2012º giro?



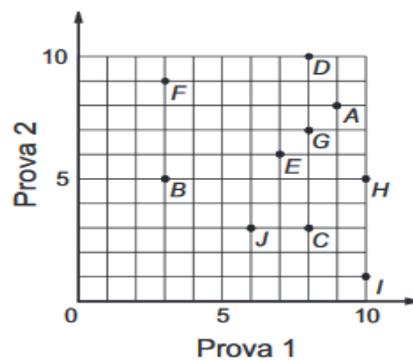
**Exercício 6.**

A soma dos números das faces opostas de um dado é sempre 7. O dado da figura é girado sucessivamente sobre o caminho indicado até parar na última posição, destacada em cinza. Nessa posição, qual é o número que está na face superior do dado?



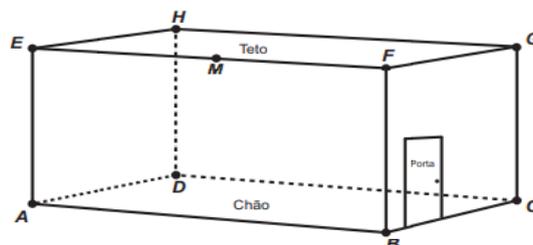
**Exercício 7.**

O professor Michel aplicou duas provas a seus dez alunos e divulgou as notas por meio do gráfico mostrado abaixo. Por exemplo, o aluno A obteve notas 9 e 8 nas provas 1 e 2, respectivamente; já o aluno B obteve notas 3 e 5. Para um aluno ser aprovado, a média aritmética de suas notas deve ser igual a 6 ou maior do que 6. Quantos alunos foram aprovados?



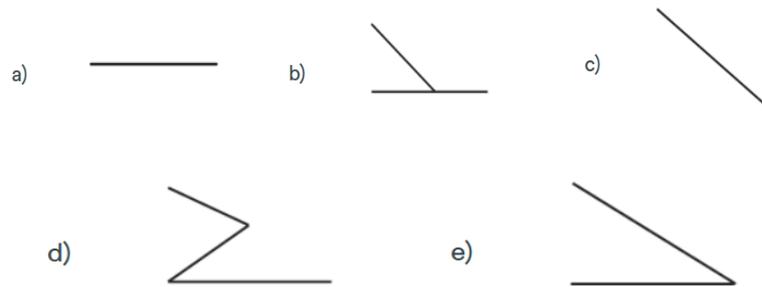
**Exercício 8.**

Uma lagartixa está no interior de um quarto e começa a se deslocar. Esse quarto, apresentando o formato de um paralelepípedo retangular, é representado pela figura.



A lagartixa parte do ponto B e vai até o ponto A. A seguir, de A ela se desloca, pela parede, até o ponto M, que é o ponto médio do segmento EF. Finalmente, pelo teto, ela vai do ponto M até o ponto H. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os respectivos pontos envolvidos.

A projeção “ortogonal” desses deslocamentos no plano que contém o chão do quarto é dado por:



**Exercício 9.**

A estrada que passa pelas cidades de Quixajuba e Paraquá tem 350 quilômetros. No quilômetro 70 dessa estrada há uma placa indicando Quixajuba a 92 km. No quilômetro 290 há uma placa indicando Paraquá a 87 km. Qual é a distância entre Quixajuba e Paraquá?

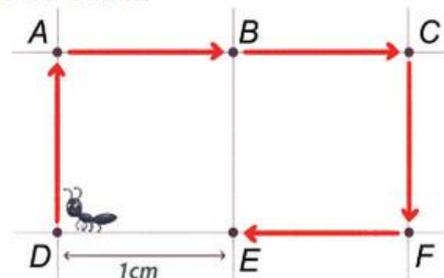


**Exercício 10.**

Escreva em ordem decrescente os números  $\sqrt[5]{3}$ ,  $3^{-2/3}$ ,  $3^{-2}$ ,  $(\frac{1}{3})^3$  e  $(\frac{1}{3})^{-1}$ .

**Exercício 11.**

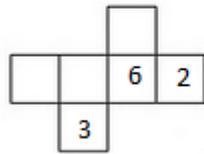
No quadriculado abaixo foram marcados seis pontos: A, B, C, D, E e F. Uma formiguinha parte de um desses pontos e, andando apenas 5 cm, consegue visitar todos os outros pontos. Um exemplo é mostrado na figura.



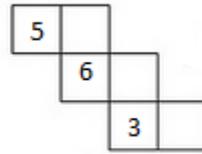
Represente todas as trajetórias diferentes que a formiguinha pode escolher um ponto de partida e depois visitar os outros pontos andando apenas 5 cm.

**Exercício 12.**

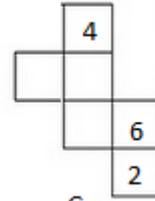
Cada uma das figuras seguintes pode ser “dobrada” de forma a representar um dado. Em todas as figuras faltam três números. Determine como numerar os quadrados em branco, de forma que a soma dos números em faces opostas seja sempre sete.



A



B



C

OBS: Sugerimos relacionar essa questão com a questão 06 anterior.