



(1) O quadrado da figura I é chamado *especial* porque

1. ele está dividido em 16 quadrados iguais;
2. em cada linha e em cada coluna aparecem os algarismos 1, 2, 3 e 4;
3. em cada um dos quadrados *A*, *B*, *C* e *D* (como na figura II) aparecem os algarismos 1, 2, 3 e 4.

4	2	1	3
1	3	2	4
3	1	4	2
2	4	3	1

I

<i>A</i>	<i>B</i>
<i>C</i>	<i>D</i>

II

(a) Complete o quadrado abaixo de modo que ele se torne especial.

	2		
3	4		
		1	
			2

(b) É possível completar o quadrado abaixo de modo a obter um quadrado especial? Por quê?

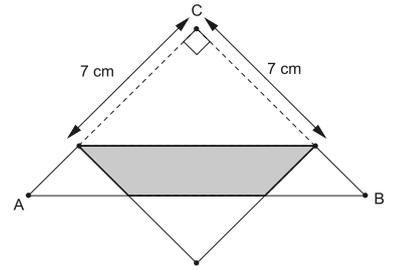
1	2		
3	4		
			2
			1

(c) Exiba todas as maneiras de completar o quadrado abaixo de modo a obter um quadrado especial.

1	2		
3	4		
			1

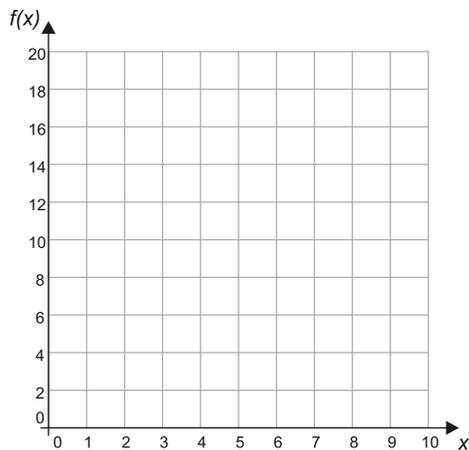
(d) Quantos quadrados especiais existem?

(2) A figura mostra um triângulo de papel  $ABC$ , retângulo em  $C$  e cujos catetos medem 10 cm. Para cada número  $x$  tal que  $0 \leq x \leq 10$ , marcam-se nos catetos os pontos que distam  $x$  cm do ponto  $C$  e dobra-se o triângulo ao longo da reta determinada por esses pontos. Indicamos por  $f(x)$  a área, em  $\text{cm}^2$ , da região onde ocorre sobreposição de papel. Por exemplo, na figura ao lado a área da região cinzenta, em  $\text{cm}^2$ , é  $f(7)$ .



a) Calcule  $f(2)$ ,  $f(5)$  e  $f(7)$ .

b) Escreva as expressões de  $f(x)$  para  $0 \leq x \leq 5$  e  $5 \leq x \leq 10$ .



c) Faça o gráfico de  $f(x)$  em função de  $x$ .

d) Determine o maior valor possível para a área da região de sobreposição.

(3) Dado um pentágono regular, dizemos que um ponto é *legal* quando:

- ele é um dos vértices do pentágono, ou
- ele é a interseção de segmentos cujos extremos são pontos legais; esses segmentos são chamados *segmentos legais*.

A figura mostra como *triangular legalmente* (isto é, decompor em partes triangulares usando **somente** segmentos legais) um pentágono em 3, 5, 9 e 11 triângulos. Os pequenos círculos indicam os pontos legais que aparecem a cada etapa. Note que a decomposição na quinta etapa **não** é uma triangulação legal, pois uma de suas partes é um



quadrilátero.

(a) Desenhe uma triangulação legal do pentágono em 7 triângulos.

(b) Mostre como triangular legalmente o pentágono em qualquer número ímpar (maior que 1) de triângulos (a figura ao lado pode ajudar).



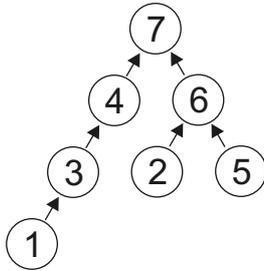
(c) Mostre que não é possível triangular legalmente o pentágono em um número par de triângulos.

(a)

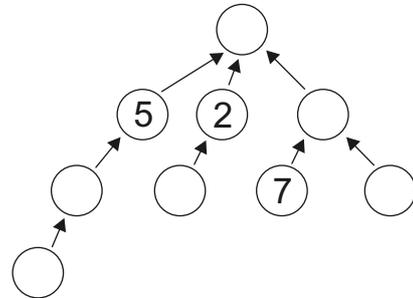
(b)

(c)

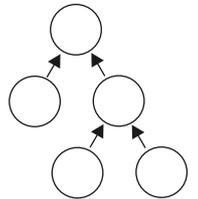
(4) Os círculos da figura abaixo foram preenchidos com os números de 1 a 7, de modo que todas as flechas apontam de um número menor para um maior. Neste caso, dizemos que a figura foi *bem preenchida*.



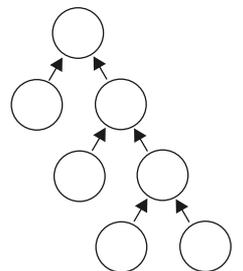
(a) Complete a figura abaixo com os números de 1 a 9 de modo que ela fique bem preenchida.



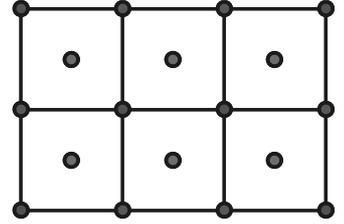
(b) De quantas maneiras a figura ao lado pode ser bem preenchida com os números de 1 a 5?



(c) De quantas maneiras a figura ao lado pode ser bem preenchida com os números de 1 a 7?



(5) Uma empresa fabrica painéis luminosos retangulares divididos em quadrados de 1 metro de lado. No centro de cada quadrado é colocada uma lâmpada vermelha e nos vértices dos quadrados são colocadas lâmpadas azuis. A figura ao lado mostra que um painel de 2 metros por 3 metros tem 6 lâmpadas vermelhas e 12 azuis, das quais 10 estão em sua borda.

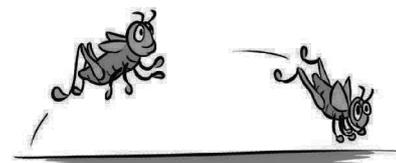


a) Quantas lâmpadas vermelhas há em um painel de 5 metros por 8 metros?

b) Quantas lâmpadas azuis há em um painel de 5 metros por 8 metros?

c) Quantas lâmpadas estão na borda de um painel no qual foram colocadas 72 lâmpadas vermelhas e 90 azuis?

(6) Dois grilos, Adonis e Basílio, pulam sempre para a frente; Adonis só dá pulos de 1 cm ou 8 cm e Basílio só dá pulos de 1 cm ou 7 cm. Eles percorrem qualquer distância com o menor número de pulos possível. Por exemplo, Adonis percorre 16 cm com apenas dois pulos de 8 cm cada, enquanto Basílio precisa de quatro pulos, sendo dois de 7 cm e outros dois de 1 cm. Por outro lado, para percorrer 15 cm, Adonis precisa de oito pulos, sendo um de 8 cm e sete de 1 cm, enquanto Basílio precisa de apenas três pulos, sendo dois de 7 cm e um de 1 cm.



Indicando por  $A(d)$  e  $B(d)$ , respectivamente, o número de pulos que Adonis e Basílio dão para percorrer  $d$  centímetros, temos  $A(15) = 8$ ,  $B(15) = 3$ ,  $A(16) = 2$  e  $B(16) = 4$ .

a) Complete a tabela abaixo.

$d$ : distância em cm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$A(d)$ : número de pulos de Adonis	1	2													8	2
$B(d)$ : número de pulos de Basílio	1	2													3	4

b) Encontre um número  $d$  entre 200 e 240 tal que  $B(d) < A(d)$  (isto é, encontre uma distância entre 200 cm e 240 cm tal que, para percorrê-la, Basílio dá menos pulos do que Adonis).

c) Encontre o maior número  $d$  tal que  $B(d) = A(d)$ .

RASCUNHO