

a área deste trapézio é igual a  $\frac{(20 + 10)10}{2} = 150 \text{ m}^2$ . Daí a área total do terreno é igual a

$$\text{área}(ABC) + \text{área}(ACDE) = 120 + 150 = 270 \text{ m}^2.$$

- (B) Como o terreno tem  $270 \text{ m}^2$ , ao dividi-lo em duas partes  $ABCF$  e  $AFDE$  de áreas iguais, cada uma destas partes deve ter área igual a  $\frac{270}{2} = 135 \text{ m}^2$ . Note que  $ABCF$  é um trapézio de base maior  $\overline{AB} = 12 \text{ m}$ , base menor  $\overline{CF}$  e altura  $\overline{AC} = 20 \text{ m}$ . Calculando a área deste trapézio pela fórmula usual e a igualando a  $135 \text{ m}^2$ , obtemos

$$\frac{(12 + \overline{CF})20}{2} = 135.$$

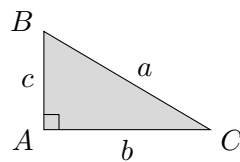
Resolvendo esta equação obtemos  $\overline{CF} = 1,5 \text{ m}$ .

## 8.2 Teorema de Pitágoras

O objetivo desta seção é apresentar e demonstrar o Teorema de Pitágoras e, em seguida, utilizar este teorema na solução de problemas. Antes de começar com esta parte mais matemática, vale a pena observar que na [Apostila 3](#) do PIC da OBMEP você pode estudar ainda mais sobre este importante teorema. Lá você pode ler sobre fatos históricos, a recíproca do Teorema de Pitágoras, triplas de números Pitagóricos, etc. A todos os alunos interessados deixamos como sugestão o estudo do primeiro capítulo daquela apostila.

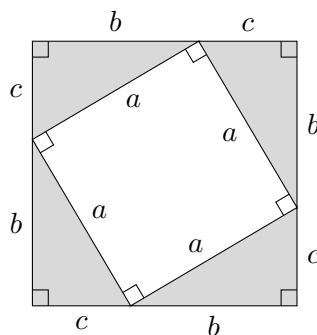
▲ 8.2 Teorema de Pitágoras

Considere um triângulo retângulo  $ABC$  com ângulo reto no vértice  $A$ . Vamos escrever os comprimentos dos lados deste triângulo como  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$ . Lembre-se de que os lados de um triângulo retângulo recebem nomes: os **catetos** são os lados  $AC$  e  $AB$  que chegam no vértice do ângulo reto e a **hipotenusa** é o lado  $BC$  que não passa pelo vértice do ângulo reto.



**Teorema de Pitágoras:** *Se um triângulo retângulo possui hipotenusa de medida  $a$  e catetos de medidas  $b$  e  $c$ , então  $a^2 = b^2 + c^2$ . Em palavras, o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos.*

Existem várias demonstrações diferentes deste teorema. A demonstração que vamos explicar começa com a observação de que com quatro cópias do triângulo retângulo de catetos  $b$  e  $c$  é possível montar um quadrado de lado  $b + c$  como está indicado na figura a seguir.



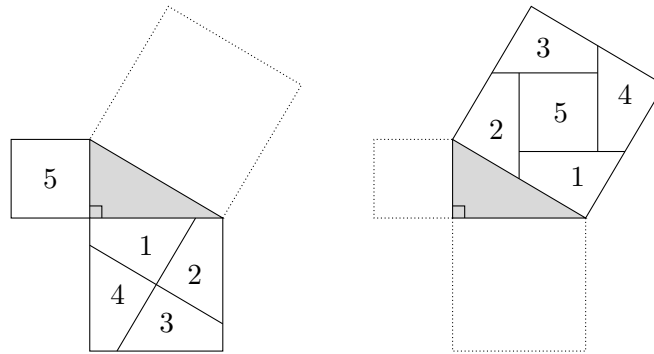
Agora vamos calcular a área deste quadrado de duas maneiras diferentes. Por um lado ele é um quadrado de lado  $b + c$ . Logo a sua área é igual a  $(b + c)^2$ . Por outro lado este quadrado é a união de um quadrado de lado  $a$  com quatro triângulos retângulos de catetos  $b$  e  $c$ . Somando as áreas destas figuras, vemos que a área do quadrado de lado  $b + c$  também pode ser expressa por  $4 \cdot \frac{bc}{2} + a^2$ . Igualando as duas expressões obtidas para a área do quadrado de lado  $b + c$  obtemos a igualdade  $4 \cdot \frac{bc}{2} + a^2 = (b + c)^2$ . Desenvolvendo e simplificando obtemos

$$4 \cdot \frac{bc}{2} + a^2 = (b + c)^2 \Rightarrow 2bc + a^2 = b^2 + 2bc + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 .$$

A última igualdade  $a^2 = b^2 + c^2$  é exatamente a relação que queríamos obter.

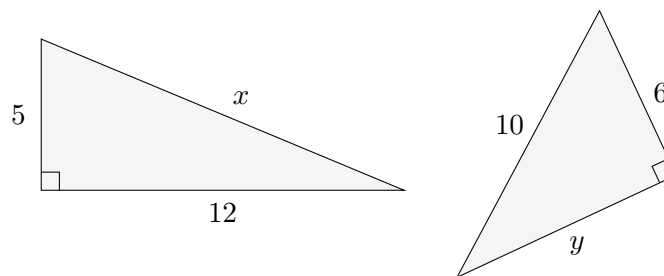
Podemos interpretar geometricamente o Teorema de Pitágoras do seguinte modo: se são construídos quadrados sobre os três lados de um triângulo retângulo, então “a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual a área do quadrado construído sobre a hipotenusa.” A figura a seguir (devida a Henry Perigal) mostra que é possível dividir os quadrados construídos sobre os catetos em 5 pedaços que podem ser reorganizados para montar o quadrado construído sobre a hipotenusa. Desta figura vemos exatamente esta interpretação para o Teorema de Pitágoras: a soma  $b^2 + c^2$  das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual a área  $a^2$  do quadrado construído sobre a hipotenusa.

▲ 8.2 Teorema de Pitágoras



O Teorema de Pitágoras nos fornece uma relação entre os três lados de um triângulo retângulo. Isto implica que se são conhecidos dois dos lados de um triângulo retângulo então é possível calcular o comprimento do terceiro lado. Vejamos isso em alguns exemplos.

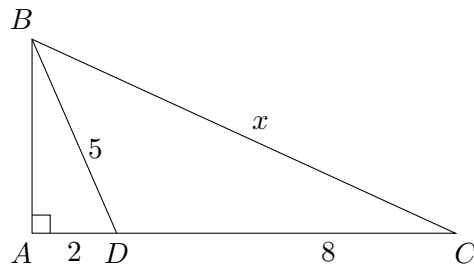
**Exemplo 1:** Nas figuras a seguir vemos dois triângulos retângulos. Utilizando os comprimentos dos lados dados nas figuras, calcule os comprimentos dos lados  $x$  e  $y$ .



Solução. Na figura da esquerda vemos um triângulo retângulo de hipotenusa  $x$  e de catetos 5 e 12. Aplicando o Teorema de Pitágoras obtemos a relação  $x^2 = 5^2 + 12^2$ . Logo  $x^2 = 169$  e portanto  $x = \sqrt{169} = 13$ .

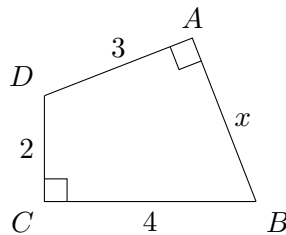
Na figura da direita vemos um triângulo retângulo de hipotenusa 10 e de catetos  $y$  e 6. Aplicando o Teorema de Pitágoras obtemos  $10^2 = y^2 + 6^2$ . Daí  $100 = y^2 + 36 \Rightarrow y^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow y = \sqrt{64} = 8$ .

**Exemplo 2:** Na figura a seguir os pontos  $A$ ,  $D$  e  $C$  estão alinhados. Determine o comprimento  $x$  da hipotenusa do triângulo retângulo  $ABC$ .



Solução. Vamos chamar de  $y$  o comprimento do segmento  $AB$ . Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo  $ABD$  obtemos  $5^2 = y^2 + 2^2$ . Daí,  $25 = y^2 + 4$  e portanto  $y^2 = 25 - 4 = 21$ . Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo  $ABC$ , obtemos  $x^2 = y^2 + 10^2$ . Logo  $x^2 = 21 + 100 \Rightarrow x^2 = 121 \Rightarrow x = \sqrt{121} = 11$ .

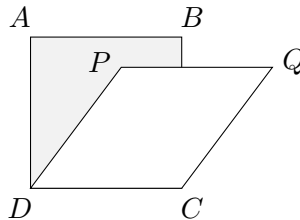
**Exemplo 3:** Na figura a seguir, o quadrilátero  $ABCD$  possui dois ângulos retos. Determine o comprimento do lado  $AB$ .



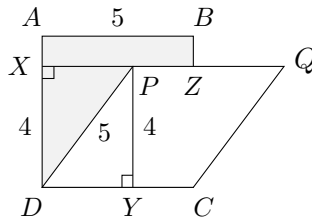
Solução. Trace o segmento  $BD$  e seja  $y$  o comprimento deste segmento. Observe que o quadrilátero  $ABCD$  é a união de dois triângulos

retângulos  $BCD$  e  $ABD$ . Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo  $BCD$  obtemos  $y^2 = 2^2 + 4^2$ , ou seja,  $y^2 = 20$ . Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo  $ABD$ , obtemos  $y^2 = x^2 + 3^2$ . Daí,  $x^2 = y^2 - 9 = 20 - 9 = 11$  e portanto  $x = \sqrt{11}$ .

**Exemplo 4:** Na figura plana a seguir, sobre o quadrado cinza  $ABCD$  com  $25 \text{ cm}^2$  de área foi desenhado um losango branco  $PQCD$  com  $20 \text{ cm}^2$  de área. Determine a área cinza do quadrado que não ficou encoberta pelo losango.



Solução. Prolongue o segmento  $PQ$  até ele intersectar o segmento  $AD$  no ponto  $X$  e seja  $Y$  o ponto do segmento  $DC$  tal que  $PY$  é uma altura do losango  $PQCD$ . Seja  $Z$  o ponto de interseção dos segmentos  $PQ$  e  $BC$ . Observe que a figura sombreada é formada pelo retângulo  $ABZX$  e pelo triângulo retângulo  $DPX$ . Para calcular a área desta figura vamos somar as áreas deste retângulo e deste triângulo retângulo.



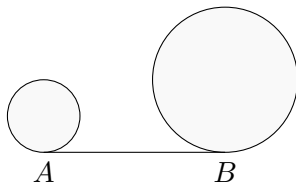
O losango tem base  $\overline{DC} = 5 \text{ cm}$ , tem altura  $PY$ , e sua área é igual a  $20 \text{ cm}^2$ . Como a área de um losango é igual ao produto da base pela

altura, temos que  $\overline{DC} \times \overline{PY} = 20$ . Daí  $5 \times \overline{PY} = 20$  donde  $\overline{PY} = 4$  cm. Como  $\overline{XD} = \overline{PY} = 4$  cm, vemos que  $\overline{XA} = 5 - 4 = 1$  cm.

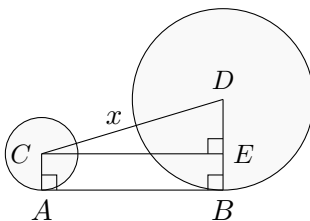
Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo  $DPX$  de cateto  $\overline{XD} = 4$  cm e de hipotenusa  $\overline{DP} = 5$  cm, concluimos que  $\overline{XP} = 3$  cm.

Daí o retângulo  $ABZX$  tem base  $\overline{XZ} = 5$  cm e tem altura  $\overline{XA} = 1$  cm. A área desse retângulo é então igual a  $5 \times 1 = 5$  cm<sup>2</sup>. Já o triângulo retângulo  $DPX$  tem base  $\overline{XP} = 3$  cm e tem altura  $\overline{XD} = 4$  cm. Sua área é então igual a  $\frac{3 \times 4}{2} = 6$  cm<sup>2</sup>. Finalmente, a área desejada da região cinza é igual a  $5 + 6 = 11$  cm<sup>2</sup>.

**Exemplo 5:** Na figura a seguir,  $AB$  é um segmento tangente às circunferências de raios 2 cm e 5 cm. Se o comprimento do segmento  $AB$  é igual a 10 cm, determine a distância entre os centros das circunferências.



Solução. Sejam  $C$  e  $D$  os centros das circunferências. Desenhe os segmentos  $CA$  e  $DB$  e desenhe o segmento  $CE$  paralelo a  $AB$ , como na figura a seguir.



## ▲ 8.2 Teorema de Pitágoras

131

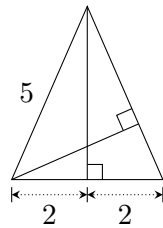
Nesta figura temos que  $\overline{CA} = 2 \text{ cm}$  e  $\overline{DB} = 5 \text{ cm}$ , pois estes dois segmentos são raios das circunferências. Além disso,  $\overline{CE} = \overline{AB} = 10 \text{ cm}$  e  $\overline{EB} = \overline{CA} = 2 \text{ cm}$ , pois  $ABEC$  é um retângulo. Daí  $\overline{DE} = \overline{DB} - \overline{EB} = 5 - 2 = 3 \text{ cm}$ . Se  $x = \overline{CD}$ , pelo Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo retângulo  $CDE$ , obtemos

$$x^2 = 10^2 + 3^2 \Rightarrow x^2 = 109 \Rightarrow x = \sqrt{109} \text{ cm.}$$

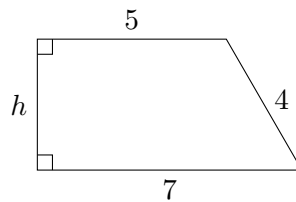
**Exercícios:**

1. Calcule o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 10.
2. Calcule o comprimento da diagonal de um retângulo  $6 \times 8$ .
3. Um retângulo tem base de 9 cm e tem diagonal de 15 cm. Determine a altura deste retângulo.
4. Um quadrado tem diagonal com 8 cm de comprimento. Qual é a área deste quadrado?
5. Para o triângulo isósceles de lados 5, 5 e 4:
  - (a) Determine a altura relativa à base de comprimento 4.
  - (b) Determine a área do triângulo.
  - (c) Utilizando o fato de que a área de um triângulo é a metade da base vezes a altura, determine a altura relativa a base de comprimento 5.

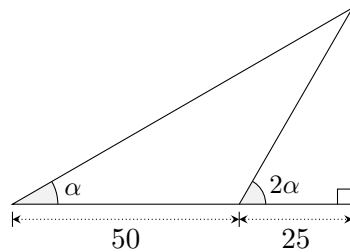




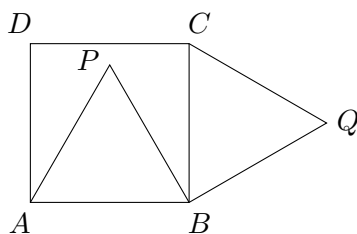
6. Determine a altura e a área do trapézio da figura a seguir.



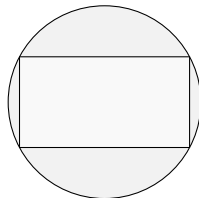
7. Uma pessoa a 25 metros de um prédio vertical enxerga o topo do prédio segundo certo ângulo. Afastando-se do prédio perpendicularmente, esta pessoa caminha 50 metros e passa a avistar o topo do prédio com a metade do ângulo anterior. Qual é a altura do prédio?



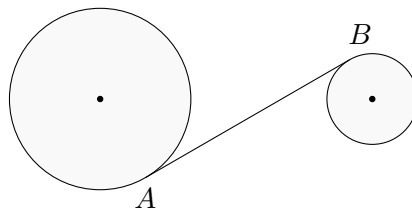
8. Na figura a seguir,  $ABCD$  é um quadrado de lado 1. Os triângulos  $ABP$  e  $BQC$  são triângulos equiláteros. Calcule o comprimento do segmento  $PQ$ .



9. Um triângulo  $ABC$  está inscrito em uma circunferência com 5 cm de raio de modo que o lado  $AB$  é um diâmetro. Se  $\overline{AC} = 8$  cm, determine o comprimento do lado  $BC$ .
10. Na figura a seguir um retângulo  $15 \times 8$  está inscrito em uma circunferência. Determine o raio desta circunferência.

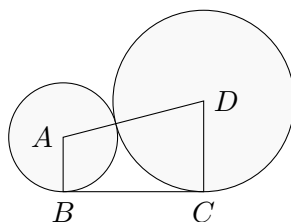


11. Na figura a seguir, uma circunferência tem raio 4 e a outra tem raio 2. Se a distância entre os centros é igual a 12, determine o comprimento do segmento  $AB$ , tangente comum às duas circunferências.

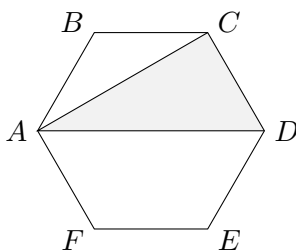


12. Na figura a seguir, a circunferência de centro em  $A$  tem raio 3 e a circunferência de centro em  $D$  tem raio 5. Se uma circunferência

é tangente a outra e se  $BC$  é um segmento tangente a estas duas circunferências, determine os comprimentos dos segmentos  $AD$  e  $BC$ .



13. Na figura a seguir,  $ABCDEF$  é um hexágono regular de lado 2 cm.



- Qual é a medida do ângulo  $\hat{A}CD$ ?
- Qual é o comprimento da diagonal  $AD$ ?
- Calcule o comprimento da diagonal  $AC$ .
- Calcule a área do triângulo  $ACD$ .

### 8.3 Visualização de figuras tridimensionais

Apesar de muitos objetos tridimensionais terem componentes que são figuras planas, como as suas faces, somente o estudo da Geometria Plana não garante um pleno entendimento da Geometria Espacial, das suas