Solução.

1. Podemos escrever $a = 7q + 3$. Daí $5a = 5(7q + 3) = 7 \times (5q) + 15$. Dividindo 15 por 7 obtemos resto 1. Daí $5a$ é a soma de um múltiplo de 7 com 1 e, portanto, o resto da divisão de $5a$ por 7 é igual a 1.

2. Podemos escrever $a = 8n + 6$ e $b = 8m + 5$. Daí $a + b = (8n + 6) + (8m + 5) = (8n + 8m) + 11$ e $a - b = (8n + 6) - (8m + 5) = (8n - 8m) + 1$. Como 11 deixa resto 3 quando dividido por 8, vemos que $a + b$ deixa resto 3 quando dividido por 8. De $a - b = (8n - 8m) + 1$, segue que $a - b$ deixa resto 1 quando dividido por 8.

Exercício 25: Quais são os restos das divisões de 1991^3 e $1989 \cdot 1990 \cdot 1991 + 1992^2$ por 7? Após tentar resolver este exercício, compare a sua solução com a que está apresentada no vídeo 35 do canal picobmep no YouTube.

2.4 Múltiplos e divisores

Multiplicando o número 3 por qualquer número natural obtém-se os múltiplos positivos de 3. Assim, os múltiplos positivos de 3 são: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ... Todos estes números formam o conjunto dos múltiplos positivos de 3, que pode ser representado do seguinte modo:

$$M(3) \;=\; \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \ldots\}.$$

Generalizando, considerando somente números positivos, dado um número natural a, o conjunto dos múltiplos de a é o conjunto

$$M(a) \;=\; \{a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, 7a, 8a, \ldots\}.$$

Deste modo, dado dois números naturais a e b, dizemos que b é um múltiplo de a se existir um número natural n tal que $b = an$. De modo equivalente, b é múltiplo de a quando o resto da divisão de b por a for igual a zero.

Assim, se m e n são dois números naturais, o produto $p = mn$ é um múltiplo tanto de m quanto de n. Neste caso, também dizemos que m e n são fatores de p. Por exemplo, na multiplicação $24 = 3 \times 8$ podemos dizer que:

- 24 é um múltiplo de 3.
- 24 é um múltiplo de 8.
- 3 é um fator de 24.
- 8 é um fator de 24.

Neste contexto, a palavra fator é um sinônimo da palavra divisor. Ou seja, na multiplicação $24 = 3 \times 8$ também podemos dizer que:

- 24 é divisível por 3.
- 24 é divisível 8.
- 3 é um divisor de 24.
- 8 é um divisor de 24.

Evidentemente, dado um número natural a, se d é um divisor positivo de a então $1 \leq d \leq a$. Assim, todo número natural possui uma quantidade finita de divisores positivos, enquanto possui uma quantidade infinita de múltiplos. Vejam alguns exemplos de conjuntos de divisores. Observamos que nesta apostila somente vamos considerar múltiplos e divisores positivos.

$$\begin{aligned} D(7) &= \{1,7\} \\ D(12) &= \{1,2,3,4,6,12\} \\ D(14) &= \{1,2,7,14\} \\ D(72) &= \{1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,36,72\} \end{aligned}$$

Olhando para o resto de uma divisão, observe que, por exemplo, na divisão de 14 por um número d, o resto desta divisão é zero somente quando d é um divisor de 14, isto é, somente quando $d \in D(14) = \{1,2,7,14\}$. Qualquer número $d \notin D(14)$ faz com que a divisão de 14 por d tenha um resto diferente de zero.

No Portal da Matemática, no 6º ano do Ensino Fundamental, no módulo "Divisibilidade" você pode assistir a videoaula "múltiplos e divisores" sobre as definições apresentadas nesta seção.

Exercício 26: (Banco de Questões 2006, nível 1, lista 4, problema 1) Da igualdade $9174532 \times 13 = 119268916$ pode-se concluir que um dos números abaixo é divisível por 13. Qual é este número?
(a) 119268903 (b) 119268907 (c) 119268911
(d) 119268913 (e) 119268923.

Solução. Como 119268916 é divisível por 13, podemos concluir que os números divisíveis por 13 são aqueles obtidos somando-se ou subtraindo-se múltiplos de 13 ao número 119268916. Dentre os números apresentados, o número $119268916 - 13 = 119268903$ é o único divisível por 13.

Quando perguntamos se um dado número b é divisível por um número a, podemos pensar que estamos perguntando se o resto da divisão de b por a é igual a zero. Utilizando as propriedades aritméticas do resto de uma divisão discutidas na seção anterior, podemos concluir algumas propriedades interessantes a respeito da divisibilidade. Por exemplo, o número $b = 7 \cdot 13 + 9$ é divisível por 7? Aqui este número b é a soma de um múltiplo de 7, $7 \cdot 13$, que deixa resto zero quando dividido por 7 com o número 9, que não é múltiplo de 7, pois deixa resto 2 quando dividido por 7. Daí o resto da divisão de $b = 7 \cdot 13 + 9$ por 7 é igual a 2 e, portanto, o número b não é divisível por 7.

> Considerando somente números inteiros positivos, um número da forma $a \cdot q + r$ é um múltiplo de a somente quando r é um múltiplo de a.

Exercício 27: Considerando somente números inteiros positivos,

1. O número $7 \cdot 38 + 5$ é divisível por 7?
2. O número $7 \cdot 241 + 84$ é um múltiplo de 7?
3. O número $7 \cdot 81 + 54$ é divisível por 7 e por 9?
4. Existe um número a que torna o número $7a + 6$ um múltiplo de 7?
5. O número $7a + 100$ pode ser divisível por 7?
6. Para quais condições sobre b, o número $7a + b$ é um múltiplo de 7?
7. Sabendo que o número $7a + b$ é divisível por 7, o que podemos afirmar sobre o número b?

Exercício 28: (OBMEP 2011 - N2Q3 - 2ª fase) O *múltiplo irado* de um número natural é o menor múltiplo do número formado apenas pelos algarismos 0 e 1. Por exemplo, o múltiplo irado de 2, bem como de 5, é 10; já o múltiplo irado de 3 é 111 e o de 110 é ele mesmo.

(a) Qual é o múltiplo irado de 20?

(b) Qual é o múltiplo irado de 9?

(c) Qual é o múltiplo irado de 45?

(d) Qual é o menor número natural cujo múltiplo irado é 1110?

Exercício 29: Extrapolando o exercício anterior, tente resolver o seguinte **desafio**. Mostre que todo número natural possui um múltiplo que se escreve apenas com os algarismos zero e um.

Solução. Para resolver este desafio você vai precisar utilizar várias propriedades apresentadas neste encontro. Tente resolver e compare a sua solução com a que está apresentada no vídeo 36. Vale a pena assistir este vídeo, pois além de ele apresentar uma solução para o desafio, ele também explica muito bem as propriedades estudadas neste encontro.

Para terminar esta seção vamos deixar dois exercícios que estão resolvidos no Portal da Matemática, no 8º ano do Ensino Fundamental, no módulo “Números Naturais: Contagem, Divisibilidade e Teorema da Divisão Euclidiana” na videoaula “Divisibilidade: Resolução de Exercícios – Parte 3”. Antes de assistir as soluções no vídeo, é claro que você deve tentar resolver estes exercícios sozinho.

Exercício 30: Sabendo-se que o número

$$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \ + \ 14$$

é divisível por 13, qual é o resto da divisão do número

$$13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

por 169?

Exercício 31: Se a e b são números naturais e $2a + b$ é divisível por 13, então qual dos seguintes números é um múltiplo de 13?

(A) $91a + b$

(B) $92a + b$

(C) $93a + b$

(D) $94a + b$

(E) $95a + b$

2.5 Fatoração

Um número natural maior que 1 é **primo** quando ele é divisível apenas por 1 e por ele mesmo. Por exemplo, 7 é primo, pois os únicos divisores de 7 são 1 e 7. Já o número 12 não é primo, pois ele possui mais divisores, como por exemplo o 2. Quando um número não é primo, ele é chamado de **composto**. Os primeiros números primos estão listados a seguir:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ \ldots$$

Pela própria definição de número composto, vemos que um número composto é um produto de dois números diferentes de 1. Por exemplo, vimos que 12 é composto, pois 2 é um divisor de 12 e isto significa que $12 = 2 \cdot 6$. Repetindo o mesmo raciocínio para cada uma das parcelas deste produto, observamos que 2 é primo e que ele não pode ser escrito como um produto de fatores diferentes de 1. Já o número 6 é composto e pode ser escrito como $6 = 2 \cdot 3$. Substituindo esta igualdade em $12 = 2 \cdot 6$, podemos escrever $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. Agora, neste produto cada uma das parcelas é um número primo que não pode ser escrito como um produto de números menores. Quando chegamos neste ponto dizemos que $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ está fatorado como um produto de números primos, ou que $2 \cdot 2 \cdot 3$ é uma fatoração do número 12 em números primos.

Afirmamos que este procedimento pode ser generalizado para qualquer número natural e chamamos esta propriedade de **Teorema Fundamental da Aritmética**: todo número natural maior que 1 pode ser escrito como um produto de números primos.

Exercício 32: Escreva o número 1820 como um produto de números primos.

Solução. Podemos fazer isto escrevendo o número 1820 ao lado de uma barra vertical. Do lado direito desta barra vamos escrevendo os divisores primos de 1820 e do lado esquerdo vamos escrevendo os resultados das divisões sucessivas por estes fatores primos, como está indicado a seguir:

$$\begin{array}{r|l} 1820 & 2 \\ 910 & 2 \\ 455 & 5 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Multiplicando os números do lado direito da barra vertical obtemos a fatoração de 1820 como um produto de números primos: $1820 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$.

Exercício 33: Dê a fatoração em números primos de 378, 638 e 1800.

O vídeo 10 do canal picobmep do YouTube apresenta, de modo bem claro, o conceito de número primo, o Crivo de Eratóstenes e o Teorema Fundamental da Aritmética. Assista este vídeo para entender melhor os conceitos introduzidos nesta aula.

Agora vamos ver uma outra propriedade muito importante dos números naturais que é obtida por meio da sua fatoração em números primos. Quando vamos fatorar um número como um produto de primos, como nos exercícios anteriores, o que fazemos, de fato, é ir testando quais números primos dividem o número dado. Por exemplo, quando determinamos a fatoração $1820 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ verificamos que apenas os números primos 2, 5, 7 e 13 dividem 1820 e que, portanto, nenhum outro número primo divide 1820. Portanto, quando vemos um número fatorado como produto de números primos, somente os primos que aparecem nesta fatoração são divisores do número dado. Formalizando:

> Um número primo p divide um certo número natural a somente quando p é um dos fatores primos que aparece na fatoração de a.

Por exemplo, da fatoração $a = 2 \cdot 7^3 \cdot 13^5$, vemos que apenas 2, 7 e 13 são os divisores primos de a. Além disso, por exemplo, os números primos 3, 5 e 11 não são divisores de a, pois eles não aparecem na fatoração de a.

Neste contexto, utilizando fatoração, é interessante explorar os exercícios de 1 a 11 do parágrafo 1 do capítulo 3 do livro do Fomin:

Exercício 34: (Fomin, páginas 22-23)

1. O número $2^9 \cdot 3$ é divisível por 2?
2. O número $2^9 \cdot 3$ é divisível por 5?
3. O número $2^9 \cdot 3$ é divisível por 8?
4. O número $2^9 \cdot 3$ é divisível por 9?

5. O número $2^9 \cdot 3$ é divisível por 6?
6. É verdade que, se um número natural for divisível por 4 e por 3, então ele tem que ser divisível por $4 \cdot 3 = 12$?
7. É verdade que, se um número natural for divisível por 4 e por 6, então ele tem que ser divisível por $4 \cdot 6 = 24$?
8. O número a não é divisível por 3. É possível que o número $2a$ seja divisível por 3?
9. O número a é par. É verdade que $3a$ tem que ser divisível por 6?
10. O número $5a$ é divisível por 3. É verdade que a tem que ser divisível por 3?
11. O número $15a$ é divisível por 6. É verdade que a tem que ser divisível por 6?

Para finalizar esta seção, observamos que sempre que um número natural está fatorado como um produto de números primos, existe uma maneira bastante rápida para calcular a sua quantidade de divisores e também existe uma maneira organizada para listar o seu conjunto de divisores. Vejamos um exemplo.

Exemplo 35: Liste todos os divisores positivos de $a = 2^3 \cdot 5^2$.

Solução. Se d é um divisor de a, então os únicos fatores primos de d são 2 e 5. Deste modo $d = 2^x \cdot 5^y$. Mais ainda, como a é um múltiplo de d, podemos escrever $a = dn$, e isto implica que as potências x e y dos números 2 e 5 na fatoração de d devem ser menores do que ou iguais as potências dos números 2 e 5 na fatoração de a. Logo $x \leq 3$ e $y \leq 2$. Portanto, $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $y \in \{0, 1, 2\}$. Fazendo todas as possibilidades, listamos todos os divisores de a, que são:

$$x = 0 \text{ e } y = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 2^0\, 5^0 = 1.$$
$$x = 0 \text{ e } y = 1 \quad \Rightarrow \quad d = 2^0\, 5^1 = 5.$$
$$x = 0 \text{ e } y = 2 \quad \Rightarrow \quad d = 2^0\, 5^2 = 25.$$
$$x = 1 \text{ e } y = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 2^1\, 5^0 = 2.$$
$$x = 1 \text{ e } y = 1 \quad \Rightarrow \quad d = 2^1\, 5^1 = 10.$$
$$x = 1 \text{ e } y = 2 \quad \Rightarrow \quad d = 2^1\, 5^2 = 50.$$
$$x = 2 \text{ e } y = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 2^2\, 5^0 = 4.$$
$$x = 2 \text{ e } y = 1 \quad \Rightarrow \quad d = 2^2\, 5^1 = 20.$$
$$x = 2 \text{ e } y = 2 \quad \Rightarrow \quad d = 2^2\, 5^2 = 100.$$
$$x = 3 \text{ e } y = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 2^3\, 5^0 = 8.$$
$$x = 3 \text{ e } y = 1 \quad \Rightarrow \quad d = 2^3\, 5^1 = 40.$$
$$x = 3 \text{ e } y = 2 \quad \Rightarrow \quad d = 2^3\, 5^2 = 200.$$

Observe que como existem 4 possibilidades para x e existem 3 possibilidades para y, o número a possui $4 \cdot 3 = 12$ divisores.

Observamos que o vídeo 10 do canal picobmep no YouTube apresenta explicações bastante detalhadas sobre o exercício anterior, isto é, sobre como podemos listar de modo organizado o conjunto de divisores de um número natural dado e como podemos determinar rapidamente a sua quantidade de divisores. Com certeza este vídeo irá ajudar na solução do próximo exercício.

Exercício 36: Em cada caso determine a quantidade de divisores e liste todos os divisores dos números dados.

(a) $3 \cdot 7^2$

(b) $2^3 \cdot 3^2$

(c) $2 \cdot 6^2$

(d) $2 \cdot 3 \cdot 5^2$

(e) $71^2 \cdot 113$

No Portal da Matemática, no 6º ano do Ensino Fundamental, no módulo de "Divisibilidade" existem 3 videoaulas sobre "conjunto e quantidade de divisores". Estas aulas são um excelente recurso para ajudar no entendimento do que foi estudado nesta seção.

2.6 Critérios de divisibilidade

O objetivo desta seção é apresentar os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 9 e 10. Antes disso gostaríamos de observar que em muitos casos o uso de um critério de divisibilidade só faz sentido para números "grandes". Para números "pequenos", o problema de decidir se um dado número é divisível ou não por outro pode ser resolvido através do uso da tabuada ou de uma simples divisão. Além disso, como "ser divisível por" e "ser múltiplo de" significam exatamente a mesma coisa, é importante ter em mente que um critério de divisibilidade também é um critério de multiplicidade.

No Portal da Matemática, no 6º ano do Ensino Fundamental, no módulo "Divisibilidade", existem 4 videoaulas que explicam os principais critérios de divisibilidade apresentados nesta apostila. Além disso, existem mais 5 videoaulas com resoluções de exercícios envolvendo critérios de divisibilidade. Recomendamos que estes vídeos sejam estudados e que as dúvidas sejam apresentadas no Fórum Hotel de Hilbert.

No que segue os critérios de divisibilidade serão apresentados por meio de exemplos numéricos resolvidos que apresentam as ideias de como as explicações poderiam ser generalizadas para quaisquer números.

Exemplo 37: [critério de divisibilidade por 3] Um número é divisível por 3 se a soma dos seus algarismos é divisível por 3 (veja o vídeo 8). Para entender este critério de divisibilidade, primeiramente precisamos observar que todas as potências de 10 deixam resto 1 quando divididas por 3:

$$10 = 3 \cdot 3 + 1.$$

$$100 = 3 \cdot 33 + 1.$$

$$1000 = 3 \cdot 333 + 1.$$

Desta observação, vamos verificar, sem efetuar a divisão, se o número 457 é ou não é divisível por 3. O número 457 pode ser escrito como $457 = 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7$ ou ainda, $457 = 4(3 \cdot 33 + 1) + 5(3 \cdot 3 + 1) + 7$. Colocando o fator 3 em evidência, vemos que $457 = 3(4 \cdot 33 + 5 \cdot 3) + (4 + 5 + 7)$. Como o número $3(4 \cdot 33 + 5 \cdot 3)$ é divisível por 3, precisamos somente verificar se $4 + 5 + 7 = 16$ é divisível por 3. Como este número não é divisível por 3, concluímos que 457 também não é divisível por 3. Mais ainda, como 16 deixa resto 1 quando dividido por 3, podemos até concluir que 457 também deixa resto 1 quando dividido por 3.

Exemplo 38: [critério de divisibilidade por 9] Um número é divisível por 9 se a soma dos seus algarismos é divisível por 9. Como no caso da divisibilidade por 3, primeiramente observe que todas as potências de 10 deixam resto 1 quando divididas por 9:

$$10 = 9 \cdot 1 + 1.$$

$$100 = 9 \cdot 11 + 1.$$

$$1000 = 9 \cdot 111 + 1.$$

Vejamos, sem efetuar a divisão, se o número 2345 é ou não é divisível por 9. Podemos escrever $2345 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5$, ou ainda, $2345 = 2(9 \cdot 111 + 1) + 3(9 \cdot 11 + 1) + 4(9 + 1) + 5$. Colocando o fator 9 em evidência, $2345 = 9(2 \cdot 111 + 3 \cdot 11 + 4) + (2 + 3 + 4 + 5)$. Como o número $9(2 \cdot 111 + 3 \cdot 11 + 4)$ é divisível por 9, precisamos somente verificar se o número $2 + 3 + 4 + 5 = 14$ é divisível por 9. Como este número não é divisível por 9, podemos concluir que 2345 também não é divisível por 9. Mais ainda, como 14 deixa resto 5 quando dividido por 9, concluímos que 2345 também deixa resto 5 quando dividido por 9.

Exemplo 39: [critério de divisibilidade por 4] Um número natural é divisível por 4 quando o número formado pelos seus dois últimos algarismos é divisível por 4. Vamos explorar este critério escrevendo, por exemplo, o número 23562 do seguinte modo: $23562 = 235 \cdot 100 + 62$. E como $100 = 4 \cdot 25$, $\;23562 = 235 \cdot 4 \cdot 25 + 62 = 4(235 \cdot 25) + 62$. Como $4(235 \cdot 25)$ é divisível por 4, é suficiente analisar o número 62. Como $62 = 4 \cdot 15 + 2$ vemos que 62 e, portanto, $23562 = 4(235 \cdot 25) + 62$ não são divisívies por 4. Além disso, estes números deixam resto 2 quando divididos por 4.

Agora vamos relembrar os critérios mais fáceis. Um número é divisível por 2 quando é par e um número é divisível por 6 quando é divisível, ao mesmo tempo, por 2 e por 3. Um número é divisível por 5 quanto termina em 0 ou em 5, e um número é divisível por 10 quando termina em zero. Utilize os critérios de divisibilidade para resolver os seguintes problemas.

Exercício 40: Verifique se cada um dos números é divisível por 2, 3, 4, 5, 6, 9 ou 10.

(a) 1260.

(b) 1746.

(c) 2210505.

Exercício 41: (Banco de Questões 2007, nível 1, lista 1, problema 1)

(a) Qual é o menor múltiplo positivo de 9 que é escrito apenas com os algarismos 0 e 1?

(b) Qual é o menor múltiplo positivo de 9 que é escrito apenas com os algarismos 1 e 2?

Solução.

(a) Um número é divisível por 9 se a soma dos seus algarismos é um múltiplo de 9. Logo, o número deve ter 9 algarismos iguais a 1. Assim, o menor número é: 111 111 111. Se alguém entender que o algarismo 0 deve obrigatoriamente figurar no número procurado, então a resposta é: 1 011 111 111.

(b) Devemos usar o maior número possível de algarismos iguais a 2, que devem ficar nas casas mais à direita. Assim, o menor número é: 12 222.

Exercício 42: Encontre um número que quando multiplicado por 9 resulta em um número formado somente por algarismos iguais a 1.

Solução. Assista o vídeo 6 e apresente uma solução diferente utilizando o critério de divisibilidade por 9.

Exercício 43: (Banco de Questões 2011, nível 1, problema 1) Encontre o menor múltiplo de 9 que não possui algarismos ímpares.

Solução. Como o número deve ser divisível por 9, a soma dos algarismos deve ser divisível por 9. Por outro lado, como todos os algarismos são pares, a soma dos algarismos também é par. Assim, a soma dos algarismos é no mínimo 18. O menor múltiplo de 9 com a soma dos algarismos igual a 18 é 99, mas seus algarismos são ímpares. Isto implica que o número deve ter três ou mais algarismos. Se queremos o menor número com 3 algarismos, o primeiro algarismo deve ser no mínimo 2. Neste caso, a soma dos outros dois algarismos é igual a 16 e como são pares, a única possibilidade é 288. Portanto, $288 = 9 \times 32$ é o menor múltiplo de 9 com todos os algarismos pares.

Exercício 44: (Banco de Questões 2010, nível 1, problema 136) No número $6a78b$, a denota o algarismo da unidade de milhar e b denota o algarismo da unidade. Se $x = 6a78b$ for divisível por 45, então quais são os possíveis valores de x?

Solução. Como o número x é múltiplo de $45 = 5 \times 9$, ele também é um múltiplo de 5 e de 9. Todos os múltiplos de 5 terminam em 0 ou em 5. Daí o número procurado tem a forma $x = 6a780$ ou a forma $x = 6a785$. Agora vamos achar o algarismo a, sabendo que para ser múltiplo de 9 a soma dos algarismos de x deve ser um múltiplo de 9.

- Se $x = 6a780$ então $6+a+7+8+0 = 21+a$ deve ser um múltiplo de 9. A única possibilidade é $21+a = 27$ donde $a = 6$ e $x = 66780$.
- Se $x = 6a785$ então $6+a+7+8+5 = 26+a$ deve ser um múltiplo de 9. A única possibilidade é $26+a = 27$ donde $a = 1$ e $x = 61785$.

Portanto o número procurado é $x = 66780$ ou $x = 61785$.

Exercício 45: (Banco de Questões 2010, nível 1, problema 169) Qual é o menor número de cinco algarismos divisível por 4 que se pode formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 9?

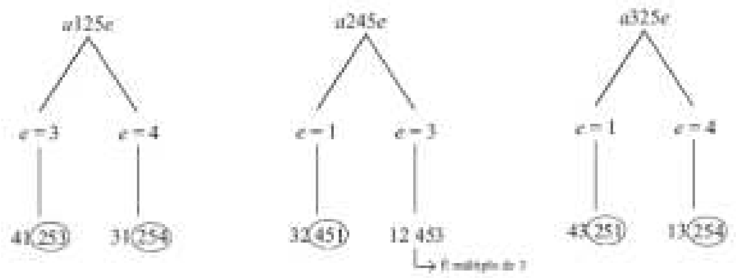
Solução. Um número é divisível por 4 se o número formado pelos seus dois últimos algarismos for divisível por 4. Assim, usando apenas os algarismos 1, 2, 3, 4 e 9, as únicas possibilidades para os dois últimos algarismos do número procurado são 12, 24, 32 ou 92. Como 9 é o maior algarismo, devemos colocá-lo "o mais à direita possível", de modo que 9 deve ser o algarismo da casa das dezenas, ou seja, nosso número termina com 92. Os outros algarismos 1, 3 e 4, devem aparecer em ordem crescente à esquerda de 92, ou seja, os três primeiros algarismos do número devem ser 134. Portanto, o número procurado é 13492.

Exercício 46: (Banco de Questões 2010, nível 1, problema 187) Os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 foram usados, cada um uma única vez, para escrever um certo número *abcde* de cinco algarismos tal que *abc* é divisível por 4, *bcd* é divisível por 5 e *cde* é divisível por 3. Encontre este número.

Solução. Para que *abc* seja divisível por 4, seus dois últimos algarismos devem formar um número divisível por 4. Como os algarismos são 1, 2, 3, 4 e 5, as únicas possibilidades são $bc = 12$, $bc = 24$, $bc = 32$ e $bc = 52$. Por outro lado, os números divisíveis por 5 terminam em 0 ou 5. Como 0 não está incluído, segue que $d = 5$, pois *bcd* é divisível por 5. Isto exclui a possibilidade $bc = 52$, porque não podemos repetir o 5. Até agora temos três possibilidades, a saber:

$$a125e,\ a245e \text{ e } a325e.$$

Examinemos estes três casos para escolher os algarismos a e e, lembrando que não pode haver repetição.



Após analisar todas as possibilidades, na figura acima todos os números circulados *cde* não são múltiplos de 3, com exceção de $cde = 453$. Portanto, vemos que apenas o 12453 atende a todas as hipóteses do problema.

Exercício 47: (Banco de Questões 2010, nível 1, problema 224) O dobro de um número, quando dividido por 5, deixa resto 1. Qual é o resto da divisão deste número por 5?

Solução 1. O dobro do número procurado é um múltiplo de 5 acrescido de 1. Como os múltiplos de 5 terminam em 0 ou 5, o dobro termina em 1 ou 6. Mas o dobro é um número par, logo termina em 6. Assim, o número termina em 3 ou 8 e, portanto, dividido por 5, deixa resto 3.

Solução 2. Sabemos que o número inteiro n procurado satisfaz $2n = 5m+1$, para algum inteiro m. Então o produto $5m = 2n-1$ de 5 por m é ímpar, o que implica que m é ímpar. Assim, $m = 2k+1$, para algum inteiro k e, portanto,

$$2n = 5m + 1 = 5(2k + 1) + 1 = 10k + 6 = 2(5k + 3),$$

ou seja, $n = 5k + 3$ deixa resto 3 na divisão por 5.

Exercício 48. O vídeo 40 e o vídeo 41 apresentam, respectivamente, critérios de divisibilidade por 11 e por 7. Estude estes vídeos e em seguida aplique estes critérios para, sem efetuar a divisão, determinar se cada um dos números a seguir é divisível por 7 ou por 11.

(a) 145 659.

(b) 4 754 542.

(c) 240 394.

(d) 2 436.