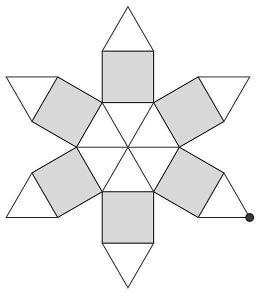
“geometria˙diagra
2015/7/22
page 116
Estilo OBMEP

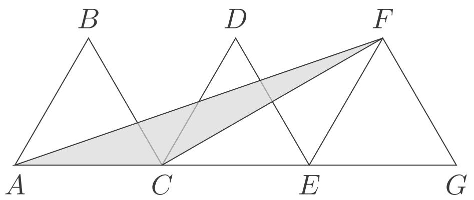
8.1 Exemplos variados: áreas e perímetros

1. (Banco de Questões 2011, Nível 1, questão 12, página 15) As flores de Geometrix têm formatos muito interessantes. Algumas delas possuem a forma mostrada na figura, na qual há seis quadrados e doze triângulos equiláteros. Uma abelha pousou no ponto destacado e andou sobre a borda da flor no sentido horário até voltar ao ponto inicial. Sabendo que a região cinza tem 24 cm^2 de área, qual é a distância percorrida pela abelha?



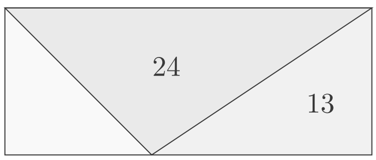
Solução. Como a região cinza é formada por seis quadrados, a área de cada um destes quadrados é igual a $24 \div 6 = 4$ cm^2. Como a área de um quadrado de lado ℓ é dada por ℓ^2, vemos que cada um dos quadrados da figura tem 2 cm de lado. Por uma contagem direta vemos que uma volta completa na borda da flor contém $6 \cdot 4 = 24$ segmentos. Logo, para dar uma volta completa na flor, a abelha percorreu uma distância igual a $24 \cdot 2 = 48$ cm.

2. Na figura a seguir, ABC, CDE e EFG são triângulos equiláteros de área de 60 cm^2 cada. Se os pontos A, C, E e G são colineares, determine a área do triângulo AFC.

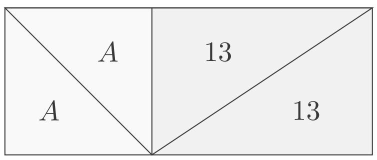


Solução. O triângulo AFC possui a mesma base e a mesma altura que os triângulos ABC, CDE e EFG. Portanto, todos estes quatro triângulos possuem a mesma área de 60 cm^2.

3. Dois segmentos dividem o retângulo da figura a seguir em três triângulos. Um deles tem área 24 e outro tem área 13. Determine a área do terceiro triângulo.

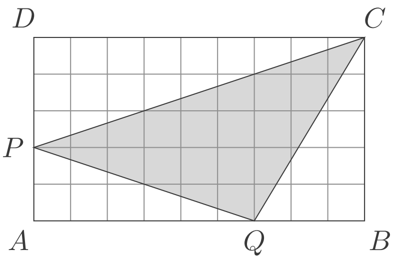


Solução. Observe a figura a seguir.



Como a diagonal de um retângulo o divide em dois triângulos de mesma área, vemos que o triângulo de área 24 tem como área a soma das áreas do triângulo de área 13 e do triângulo de área desconhecida. Se este triângulo tem área igual a A, então concluímos que $A + 13 = 24$ e, portanto, $A = 24 - 13 = 11$.

4. Na figura a seguir, $ABCD$ é um retângulo de base 9 e de altura 5. Determine a área do triângulo CPQ.

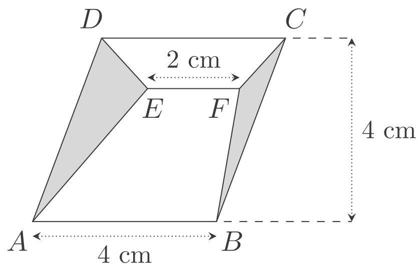


Solução. Em algumas situações, para o cálculo de uma área, é mais fácil considerar uma região maior e subtrair dela pedaços que não fazem parte da região que se pretende calcular a área. No caso deste problema, para calcular a área do triângulo CPQ podemos subtrair da área do retângulo $ABCD$ as áreas dos triângulos brancos CDP, PAQ e QBC. Como

- área$(ABCD) = 9 \cdot 5 = 45$
- área$(CDP) = \dfrac{9 \cdot 3}{2} = 13,5$
- área$(PAQ) = \dfrac{6 \cdot 2}{2} = 6$
- área$(QBC) = \dfrac{3 \cdot 5}{2} = 7,5$

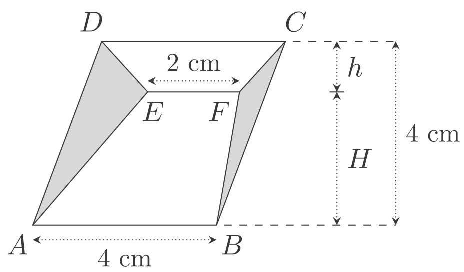
temos que área$(CPQ) = 45 - 13,5 - 6 - 7,5 = 18$.

5. **(OBMEP 2009 – N2Q18 – 1ª fase)** Na figura, $ABCD$ é um paralelogramo e o segmento EF é paralelo a AB. Qual é a soma das áreas dos triângulos sombreados?



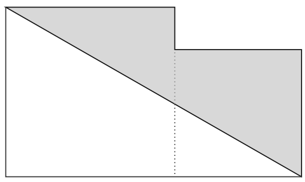
Solução. Como no problema anterior, vamos subtrair de uma área maior, áreas de regiões que não fazem parte da figura que pretendemos calcular a área. Aqui vamos subtrair da área do paralelogramo $ABCD$ as áreas dos trapézios brancos $ABFE$ e $CDEF$.

- O paralelogramo $ABCD$ tem base 4 cm e tem altura 4 cm. Logo sua área é igual a $4 \cdot 4 = 16$ cm^2.
- O trapézio $ABFE$ tem base maior 4 cm, tem base menor 2 cm e tem uma altura H. A área deste trapézio é $\dfrac{(2+4)H}{2} = 3H$.
- O trapézio $CDEF$ tem base maior 4 cm, tem base menor 2 cm e tem uma altura h. A área deste trapézio é $\dfrac{(2+4)h}{2} = 3h$.

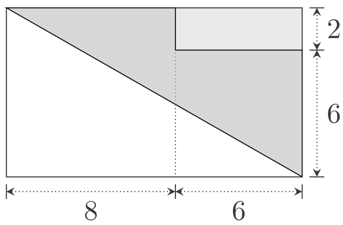


Daí a soma das áreas dos triângulos sombreados é igual a $16 - 3H - 3h = 16 - 3(H + h)$. Observe agora que a soma das alturas $H + h$ dos trapézios é igual a altura 4 do paralelogramo. Logo, $H + h = 4$ e, portanto, a soma das áreas dos triângulos sombreados é igual a $16 - 3(H + h) = 16 - 3 \cdot 4 = 16 - 12 = 4$ cm^2.

6. **(OBMEP 2014 – N1Q7 – 1ª fase)** A figura é formada por dois quadrados, um de lado 8 cm e outro de lado 6 cm. Qual é a área da região cinza?



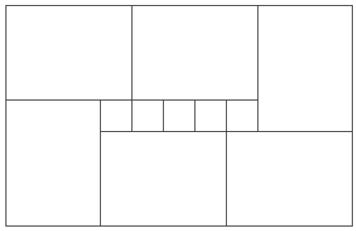
Solução. Se juntarmos à região cinza o retângulo cujos lados medem 6 cm e 2 cm, como na figura a seguir, teremos um novo retângulo com lados medindo 14 cm e 8 cm cuja área é $14 \cdot 8 = 112$ cm^2.



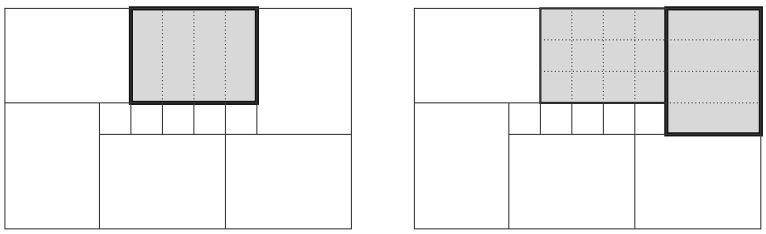
A área desejada é igual à diferença entre a área da metade desse último retângulo e a área do retângulo 2×6 que foi acrescentado, isto é, $\frac{112}{2} - 6 \cdot 2 = 56 - 12 = 44$ cm^2.

7. (Banco de Questões 2011, Nível 1, questão 19) A partir de seis retângulos iguais e cinco quadrados iguais é formado um retângulo

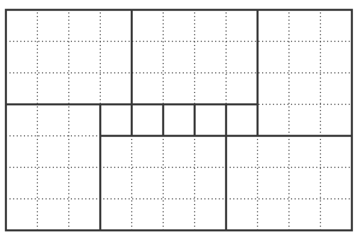
de perímetro 324 cm, como mostrado na figura. Determine a área do retângulo construído.



Primeira Solução. Do retângulo cinza destacado a esquerda, concluímos que um dos lados do retângulo mede 4 vezes o lado do quadrado. Assim, como ilustrado na figura da direita, o outro lado do retângulo mede 3 vezes o lado do quadrado.

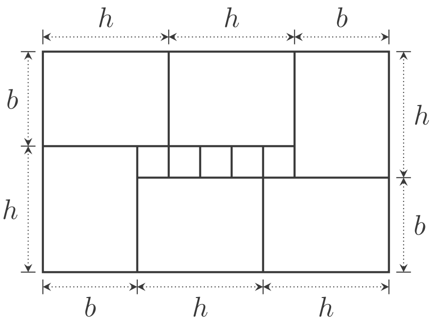


Segue daí que podemos dividir o retângulo em $11 \times 7 = 77$ quadrados, como indicado na figura a seguir.

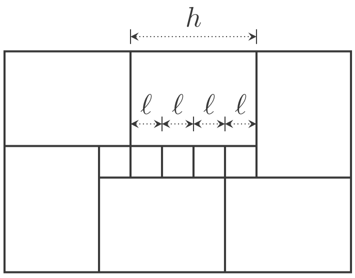


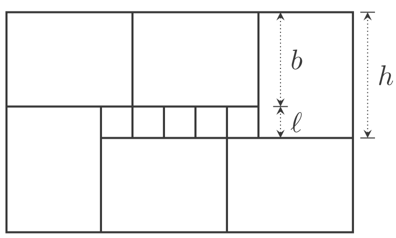
O perímetro deste retângulo é $11 + 11 + 7 + 7 = 36$ vezes o lado do quadrado. Portanto, o lado do quadrado é $324 \div 36 = 9$ cm e a área do retângulo é $11 \times 7 \times 9^2 = 6237$ cm^2.

Segunda Solução. Também podemos resolver esta questão de uma maneira um pouco mais algébrica. Vejamos. Seja b a base e seja h a altura de um dos seis retângulos que formam o retângulo do contorno da figura dada, e seja ℓ o lado de um dos cinco quadradinhos. Como está indicado na figura a seguir, o perímetro do retângulo é formado por seis segmentos h e por quatro segmentos b. Daí obtemos a relação $6h + 4b = 324$.



Agora, na figura a seguir, na esquerda vemos que $h = 4\ell$ e na direita vemos que $b + \ell = h$.





Resumindo, obtemos o seguinte sistema de equações:

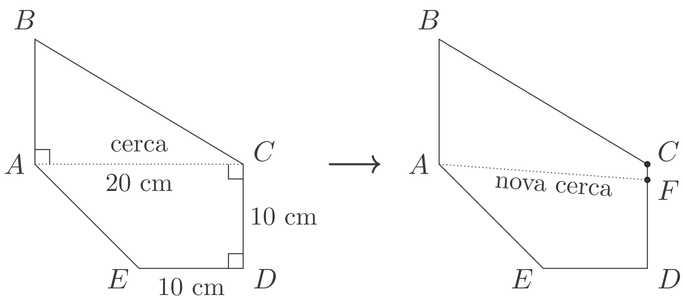
$$\begin{cases} 6h + 4b & = & 324 \\ h & = & 4\ell \\ b + \ell & = & h \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtemos $b = 27$ cm, $h = 36$ cm e $\ell = 9$ cm. Daí a área do retângulo do contorno da figura dada tem base $b + 2h = 99$ cm e tem altura $b + h = 63$ cm. Sua área é, então, igual a $99 \cdot 63 = 6237$ cm^2.

8. **(OBMEP 2008 – N1Q2 – 2ª fase)** A figura da esquerda representa o terreno de Dona Idalina. Este terreno é dividido em duas partes por uma cerca, representada pelo segmento AC. A parte triangular ABC tem área igual a 120 m^2.

   (A) Qual é a área total do terreno?

   (B) Dona Idalina quer fazer uma nova cerca, representada pelo segmento AF na figura da direita, de modo a dividir o terreno em duas partes de mesma área. Qual deve ser a distância CF?



Solução.

(A) O terreno de Dona Idalina é formado por um triângulo ABC e por um trapézio $ACDE$. O triângulo ABC tem área igual a 120 m^2. O trapézio $ACDE$ tem base maior $\overline{AC} = 20$ m, tem base menor $\overline{DE} = 10$ m e tem altura $\overline{CD} = 10$ m. Logo a área deste trapézio é igual a $\dfrac{(20+10)10}{2} = 150$ m^2. Daí a área total do terreno é igual a

$$\text{área}(ABC) + \text{área}(ACDE) = 120 + 150 = 270 \text{ m}^2.$$

(B) Como o terreno tem 270 m^2, ao dividi-lo em duas partes $ABCF$ e $AFDE$ de áreas iguais, cada uma destas partes deve ter área igual a $\dfrac{270}{2} = 135$ m^2. Note que $ABCF$ é um trapézio de base maior $\overline{AB} = 12$ m, base menor $\overline{CF}$ e altura $\overline{AC} = 20$ m. Calculando a área deste trapézio pela fórmula usual e a igualando a 135 m^2, obtemos

$$\frac{(12+\overline{CF})20}{2} = 135.$$

Resolvendo esta equação obtemos $\overline{CF} = 1,5$ m.

8.2 Teorema de Pitágoras

O objetivo desta seção é apresentar e demonstrar o Teorema de Pitágoras e, em seguida, utilizar este teorema na solução de problemas. Antes de começar com esta parte mais matemática, vale a pena observar que na Apostila 3 do PIC da OBMEP você pode estudar ainda mais sobre este importante teorema. Lá você pode ler sobre fatos históricos, a recíproca do Teorema de Pitágoras, triplas de números Pitagóricos, etc. A todos os alunos interessados deixamos como sugestão o estudo do primeiro capítulo daquela apostila.