Métodos de Contagem
e Probabilidade

Paulo Cezar Pinto Carvalho

versão 2015

Métodos de Contagem e Probabilidade

Impresso no Brasil/Printed in Brazil
Primeira edição
Décima primeira impressão

Capa: Rogério Kaiser

Carvalho, Paulo
Métodos de Contagem e Probabilidade
Rio de Janeiro, IMPA, 2015
89 páginas
ISBN 978-85-244-0343-9

Distribuição
IMPA/OBMEP
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
e-mail: cad_obmep@obmep.org.br
www.obmep.org.br

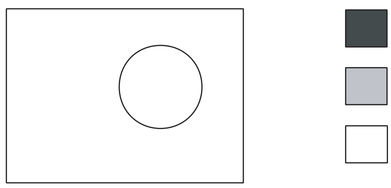
Texto já revisado pela nova ortografia.

Capítulo 1

Métodos de Contagem

Problemas de contagem são, muitas vezes, considerados difíceis entre alunos e professores, apesar de as técnicas matemáticas necessárias serem bastante elementares: essencialmente, o conhecimento das operações aritméticas de soma, subtração, multiplicação e divisão. O objetivo deste material é habituar o aluno a trabalhar com problemas de contagem e a ver que, afinal de contas, tais problemas podem ser resolvidos com raciocínios simples na grande maioria dos casos, sem exigir o uso de fórmulas complicadas. É isto o que procuramos mostrar nos exemplos a seguir.

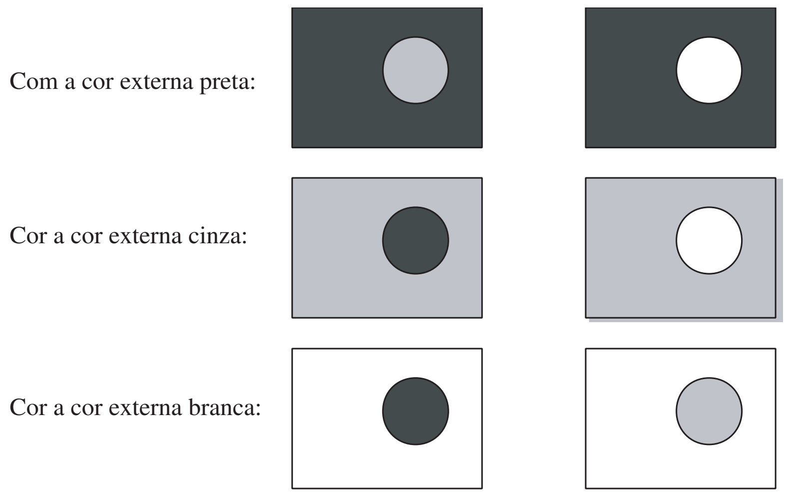
Exemplo 1. Uma bandeira com a forma abaixo vai ser pintada utilizando duas das cores dadas.



(a) *Liste todas as possíveis bandeiras. Quantas são elas?*
Solução: É importante ter um procedimento sistemático para listar todas as possíveis bandeiras, sem repeti-las. Para tal, devemos identificar as diferentes decisões a serem tomadas e examinar todas as possibilidades para cada uma delas. No caso deste problema, uma forma natural para planejar o preenchimento da bandeira é:

- escolher a cor a ser utilizada para a parte externa;
- a seguir, escolher a cor para o círculo interno.

A primeira decisão pode ser feita de 3 modos diferentes, já que a cor externa pode ser qualquer uma das disponíveis. Uma vez tomada esta decisão, a cor escolhida não pode mais ser usada para o círculo interno. Por exemplo, se a cor preta for escolhida para a parte externa, a cor interna deverá ser cinza ou branca.
Podemos, então, listar todas as possíveis bandeiras, que são 6, de acordo com a figura abaixo.



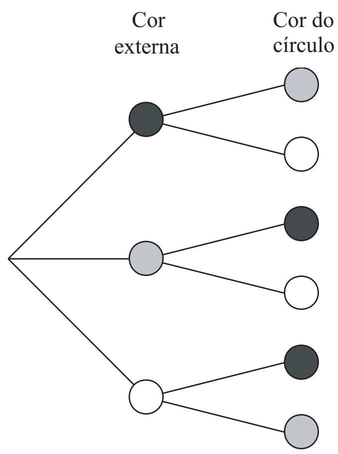
Um fato importante, que pode ser explorado na contagem eficiente do número possível de bandeiras, é o seguinte: as cores disponíveis para pintar o círculo mudam de acordo com a escolha da parte externa, mas a sua quantidade é sempre a mesma, já que, qualquer que seja a cor externa escolhida, há sempre duas cores restantes para o círculo. Portanto, poderíamos ter empregado o seguinte raciocínio para contar o número de possíveis bandeiras, sem listá-las:

A cor externa pode ser escolhida de três modos diferentes. Qualquer que seja essa escolha, a cor do círculo pode ser escolhida de dois modos. Logo, o número total de possibilidades é $2+2+2=3\times 2=6$.

O procedimento acima ilustra o *Princípio Multiplicativo* ou *Princípio Fundamental da Contagem:*

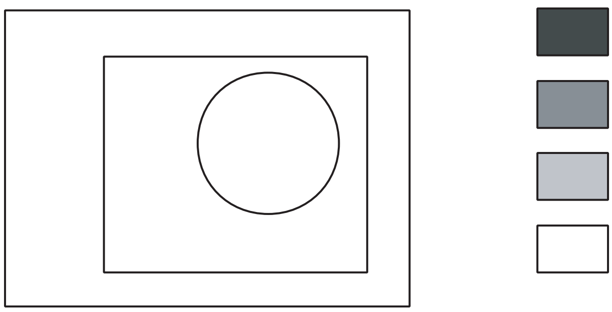
Se uma decisão D_1 *pode ser tomada de* p *modos e, qualquer que seja essa escolha, a decisão* D_2 *pode ser tomada de* q *modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões* D_1 *e* D_2 *é igual a* pq.

O Princípio Multiplicativo pode ser ilustrado com o auxílio de uma árvore de enumeração como a da figura a seguir.



(b) *Quantas são as possíveis bandeiras no caso em que* 4 *cores estão disponíveis?*
Solução: As decisões a serem tomadas são exatamente as mesmas do caso anterior, tendo mudado apenas o número de possibilidades de escolha. Para a cor externa, temos agora 4 possibilidades. Uma vez escolhida a cor externa, a cor do círculo pode ser qualquer uma das outras 3. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o número de modos diferentes para pintar a bandeira é $4 \times 3 = 12$.

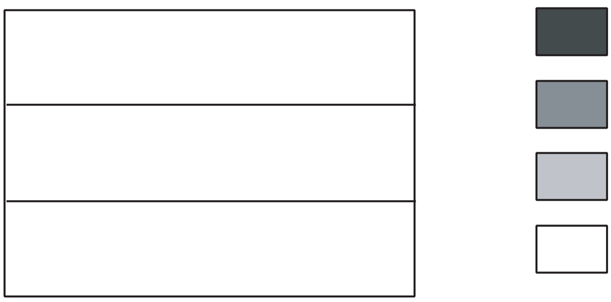
Exemplo 2. Quantas são as formas de pintar a bandeira a seguir utilizando 3 cores diferentes dentre 4 dadas?



Solução: Agora, temos 3 decisões consecutivas a tomar: a cor externa, a do retângulo e a do círculo. A cor externa pode ser qualquer uma das 4 cores; uma vez escolhida a cor externa, o retângulo pode ser pintado de três modos distintos. Logo, a escolha combinada da cor externa e do retângulo pode ser feita de $4 \times 3 = 12$ modos. Para cada um destes 12 modos, o círculo pode ser pintado com uma das duas cores que sobraram. Logo, o número total de possibilidades é $4 \times 3 \times 2 = 24$.
O raciocínio acima mostra que o Princípio Multiplicativo pode, na

realidade, ser aplicado quando temos diversas etapas de decisão: desde que o número de possibilidades em cada etapa não dependa das decisões anteriores, basta multiplicá-los para achar o número total de possibilidades.

Exemplo 3. Para pintar a bandeira abaixo, há 4 cores disponíveis. De quantos modos ela pode ser pintada de modo que faixas adjacentes tenham cores distintas?



Solução: O primeiro passo é escolher em que ordem vamos pintar a bandeira. Podemos, por exemplo, pintar as faixas de cima para baixo (veja, no exercício 16, o que ocorre quando escolhemos mal a ordem de preenchimento). A cor da primeira faixa pode ser qualquer uma das 4 cores. Qualquer que seja a cor escolhida, para a segunda faixa temos 3 cores para escolher. Escolhida a cor da segunda faixa, a terceira pode ser pintada de qualquer cor, exceto a usada para a segunda faixa. Assim, temos novamente 3 possibilidades de escolha.

O número total de possibilidades é, então:

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & \times & 3 & \times & 3 & = & 36 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1^{\underline{a}} \text{ faixa} & & 2^{\underline{a}} \text{ faixa} & & 3^{\underline{a}} \text{ faixa} & & \end{array}$$

Exemplo 4. Quantos são os números de três algarismos distintos?

Solução: Vamos escolher, sucessivamente, os três algarismos, começando com o da esquerda (isto é importante, como veremos abaixo). O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual a 0. O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro algarismo. O terceiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos, pois não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo algarismo.

A resposta é $9 \times 9 \times 8 = 648$.

Exemplo 5. O código Morse usa duas letras, ponto e traço, e as palavras têm de 1 a 4 letras. Quantas são as palavras do código Morse?

Solução: Há palavras de 1, 2, 3 e 4 letras, em quantidades diferentes. Assim, nossa estratégia é a de usar o Princípio Multiplicativo para contar separadamente estas palavras e, depois, somar estas quantidades. Há 2 palavras de uma letra; há $2 \times 2 = 4$ palavras de duas letras, pois há dois modos de escolher a primeira letra e dois modos de escolher a segunda letra; analogamente, há $2 \times 2 \times 2 = 8$ palavras de três letras e $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ palavras de 4 letras. O número total de palavras é $2 + 4 + 8 + 16 = 30$.

Você já deve ter percebido nesses exemplos qual é a estratégia para resolver problemas de contagem:

1. Postura: Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar. Nas diversas situações dos Exemplos 1 a 3, nós nos colocamos no papel da pessoa que deveria colorir a bandeira; no Exemplo 4, colocamo-nos no papel da pessoa que deveria escrever o número.

2. Divisão: Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, correspondentes às diversas etapas do processo de decisão. Colorir a bandeira foi dividido em colorir cada região; formar um número de três algarismos foi dividido em escolher cada um dos três algarismos. Formar a palavra no código Morse foi dividido em escolher o número de letras e, a seguir, em escolher cada letra.

A ordem em que as decisões são tomadas pode ser extremamente importante para a simplicidade do processo de resolução. Vamos voltar ao Exemplo 4 (*Quantos são os números de três algarismos distintos?*) para ver como uma estratégia equivocada pode levar a uma solução desnecessariamente complicada.

Começando a escolha dos algarismos pelo último algarismo, há 10 modos de escolher o último algarismo. Em seguida, há 9 modos de escolher o algarismo central, pois não podemos repetir o algarismo já usado. Agora temos um impasse: de quantos modos podemos escolher o primeiro algarismo? A resposta é "depende". Se não tivermos usado o 0, haverá 7 modos de escolher o primeiro algarismo, pois não poderemos usar nem o 0 nem os dois algarismos já usados nas demais casas; se já tivermos usado o 0, haverá 8 modos de escolher o primeiro algarismo.

Para evitar, na medida do possível, impasses como o acima, uma outra recomendação importante é:

3. Não adiar dificuldades. Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. No Exemplo 4, a escolha do primeiro algarismo era uma decisão mais restrita do que as outras, pois o primeiro algarismo não pode ser igual a 0. Essa é, portanto, a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar, e, conforme acabamos de ver, postergá-la só serve para causar problemas.

Exemplo 6. Quantos são os números pares de três algarismos distintos?

Solução: Há 5 modos de escolher o último algarismo. Note que começamos pelo último algarismo, que é o mais restrito; o último algarismo só pode ser 0, 2, 4, 6 ou 8.

Em seguida, vamos ao primeiro algarismo. De quantos modos se pode escolher o primeiro algarismo? A resposta é "depende": se não tivermos usado o 0, haverá 8 modos de escolher o primeiro algarismo, pois não poderemos usar nem o 0 nem o algarismo já usado na última casa; se já tivermos usado o 0, haverá 9 modos de escolher o primeiro algarismo, pois apenas o 0 não poderá ser usado na primeira casa.

Assim, apesar de termos procurado atacar inicialmente a escolha mais restrita, chegamos a um impasse no uso do Princípio Multiplicativo. Esse tipo de impasse é comum na resolução de problemas e há dois métodos para vencê-lo.

O primeiro método consiste em voltar atrás e contar separadamente.

Contaremos separadamente os números que terminam em 0 e os que não terminam em 0. Comecemos pelos que terminam em 0. Há 1 modo de escolher o último algarismo, 9 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o algarismo central. Há, portanto, $1 \times 9 \times 8 = 72$ números de três algarismos distintos terminados em 0.

Para os que não terminam em 0, há 4 modos de escolher o último algarismo, 8 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o algarismo central. Há $4 \times 8 \times 8 = 256$ números pares de três algarismos distintos que não terminam em 0.

A resposta é $72 + 256 = 328$.

O segundo método consiste em ignorar uma das restrições do problema, o que nos fará contar em demasia. Depois descontaremos o que houver sido contado indevidamente.

Primeiramente fazemos de conta que o 0 pode ser usado na primeira casa do número. Procedendo assim, há 5 modos de escolher o último algarismo (só pode ser 0, 2, 4, 6 ou 8), 9 modos de escolher o primeiro algarismo (não podemos repetir o algarismo usado na última casa – note que estamos permitindo o uso do 0 na primeira casa) e 8 modos de escolher o algarismo central. Há $5 \times 9 \times 8 = 360$ números, aí inclusos os que começam por 0.

Agora vamos determinar quantos desses números começam por zero; são esses os números que foram contados indevidamente. Há 1 modo de escolher o primeiro algarismo (tem que ser 0), 4 modos de escolher o último (só pode ser 2, 4, 6 ou 8 – lembre-se de que os algarismos são distintos) e 8 modos de escolher o algarismo central (não podemos repetir os algarismos já usados). Há $1 \times 4 \times 8 = 32$ números começados por 0.

A resposta é $360 - 32 = 328$.

Exemplo 7. De quantos modos diferentes 6 pessoas podem ser colocadas em fila?

Solução: Este é um problema clássico de contagem, chamado de *problema das permutações simples*, que é facilmente resolvido pelo Princípio Multiplicativo. De fato, basta escolher sucessivamente as pessoas colocadas em cada posição da fila. Para escolher o primeiro da fila, temos 6 possibilidades; o segundo pode ser qualquer uma das 5 pessoas restantes, e assim por diante. Logo, o número total de possibilidades é $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$. De um modo geral, o número de modos de ordenar n objetos é igual a $n \times (n-1) \times \cdots \times 1$, que é representado por $n!$ (lê-se: n fatorial).

Exemplo 8. De quantos modos podem-se escolher três dos jogadores de um time de futebol para representá-lo em uma cerimônia de premiação?

Solução: Este é um outro problema clássico de contagem, chamado de *problema das combinações simples*. À primeira vista, parece ser simples resolvê-lo pelo Princípio Multiplicativo: basta escolher um representante de cada vez. O primeiro pode ser escolhido de 11 modos, o segundo, de 10 e o terceiro, de 9. Logo, o número total de possibilidades parece ser $11 \times 10 \times 9 = 990$. Esta solução está incorreta, mas podemos consertá-la para chegar à resposta certa. Suponha que tivéssemos escolhido, sucessivamente, os jogadores A, B e C. A comissão de representantes assim formada seria exatamente a mesma se tivéssemos selecionado, por exemplo, primeiro B, depois A, depois C. No entanto, as duas escolhas foram contadas por nós como se fossem distintas. O que nos permite corrigir o resultado da contagem é o fato de que todas as possíveis comissões são repetidas o mesmo número de vezes, correspondente a todas as suas possíveis ordenações. Por exemplo, A, B e C vão surgir, em nosso processo de enumeração, $3 \times 2 \times 1 = 6$ vezes, o mesmo ocorrendo com todas as possíveis comissões. Logo, o número correto de comissões é igual a $990/6 = 165$.

De modo geral, o número de modos de escolher p dentre n objetos é representado por C_n^p (lê-se: combinação de n tomados p a p) e é igual a $\dfrac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p(p-1)\cdots 1}$.

Exercícios

1) Um grupo de 4 alunos (Alice, Bernardo, Carolina e Daniel) tem que escolher um líder e um vice-líder para um debate.

   (a) Faça uma lista de todas as possíveis escolhas (use a inicial de cada nome, para facilitar). Organize a sua lista do seguinte modo: primeiro, escreva todas as possibilidades em que Alice é a presidente, depois, aquelas em que Bernardo é presidente, e assim por diante.

   (b) Conte o número de possíveis escolhas e verifique que o Princípio Multiplicativo fornece a mesma resposta.

2) Um restaurante possui um cardápio que apresenta escolhas de saladas (salada verde, salada russa ou salpicão), sopas (caldo verde, canja ou de legumes) e pratos principais (bife com fritas, peixe com puré, frango com legumes ou lasanha).

   (a) De quantos modos se pode escolher um prato deste cardápio?

   (b) De quantos modos se pode escolher uma refeição completa, formada por uma salada, uma sopa e um prato principal?

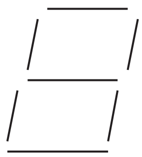
3) Quantos algarismos são escritos ao se escreverem os números inteiros de 1 a 100?

4) João e Isabel lançam, cada um, um dado.

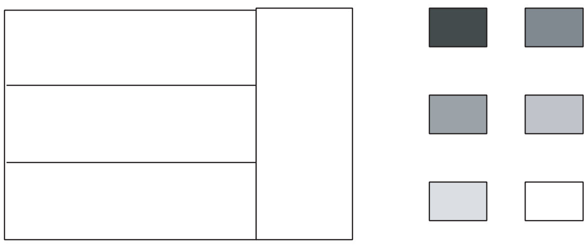
(a) Quantas são as possíveis combinações de resultado?

(b) Quantas são as possíveis somas que eles podem obter?

5) Cada dígito de uma calculadora é mostrado no visor acendendo filamentos dispostos como mostra a figura a seguir. Quantos símbolos diferentes podem ser representados? (Não inclua o caso em que nenhum filamento é aceso.)



6) Para pintar a bandeira abaixo estão disponíveis as seis cores dadas, sendo que regiões adjacentes devem ser pintadas de cores diferentes.



(a) Qual é o número mínimo de cores a serem usadas?

(b) De quantos modos a bandeira pode ser pintada?

7) Dispomos de 5 cores distintas. De quantos modos podemos colorir os quatro quadrantes de um círculo, cada quadrante com

uma só cor, se quadrantes cuja fronteira é uma linha não podem receber a mesma cor?

8) Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão? Em quantos destes gabaritos a letra A aparece exatamente uma vez? Em quantos a letra A não aparece?

9) Liste todos os subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$. Quantos são eles? De modo geral, quantos são os subconjuntos de um conjunto que tem n elementos?

10) De quantos modos 3 pessoas podem se sentar em 5 cadeiras em fila?

11) De quantos modos 5 homens e 5 mulheres podem se sentar em 5 bancos de 2 lugares, se em cada banco deve haver um homem e uma mulher?

12) De quantos modos podemos colocar 2 reis diferentes em casas não adjacentes de um tabuleiro 8×8? E se os reis fossem iguais?

13) De quantos modos podemos formar uma palavra de 5 letras de um alfabeto de 26 letras, se a letra A deve figurar na palavra mas não pode ser a primeira letra da palavra? E se a palavra devesse ter letras distintas?

14) As placas dos veículos são formadas por três letras (de um alfabeto de 26) seguidas por 4 algarismos. Quantas placas poderão ser formadas?

15) Um vagão do metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem se sentar de frente, 3 preferem se sentar de costas, e os demais não têm preferência. De quantos modos eles podem se sentar, respeitadas as preferências?

16) Escrevem-se os inteiros de 1 até 2 222.

    (a) Quantas vezes o algarismo 0 é escrito?

    (b) Em quantos números aparece o algarismo 0?

17) Quantos são os inteiros positivos de 4 algarismos nos quais o algarismo 5 figura?

18) Em uma banca há 5 exemplares iguais da *Veja*, 6 exemplares iguais da *Época* e 4 exemplares iguais da *Isto É*. Quantas coleções não vazias de revistas dessa banca podem ser formadas?

19) *Tendo* 4 *cores disponíveis, de quantos modos se pode pintar uma bandeira com* 3 *listras, tendo listras adjacentes de cores distintas?* Um aluno deu a seguinte solução: "Primeiro, eu vou pintar as listras extremas; para cada uma, eu tenho 4 possibilidades de escolha. Depois, eu pinto a listra central; como ela tem que ter cor diferente das duas vizinhas, eu posso escolher sua cor de apenas 2 modos. Logo, o número total de modos de pintar a bandeira é $4 \times 4 \times 2 = 32$". A solução está certa ou errada? Se estiver errada, onde está o erro?

20) *Com* 5 *homens e* 5 *mulheres, de quantos modos se pode formar um casal?* Este problema foi resolvido por um aluno do modo a seguir: "A primeira pessoa do casal pode ser escolhida de 10 modos, pois ela pode ser homem ou mulher. Escolhida a primeira pessoa, a segunda pessoa só poderá ser escolhida de 5 modos, pois deve ser de sexo diferente do da primeira pessoa. Há, portanto, $10 \times 5 = 50$ modos de formar um casal."

    A solução está certa ou errada? Se estiver errada, onde está o erro?

21) Cada peça de um dominó apresenta um par de números de 0 a 6, não necessariamente distintos. Quantas são essas peças? E se os números forem de 0 a 8?

22) Quantos retângulos há formados por casas adjacentes em um tabuleiro de xadrez 8×8? Por exemplo, em um tabuleiro 2×2 há 9 retângulos, como mostra a figura abaixo.