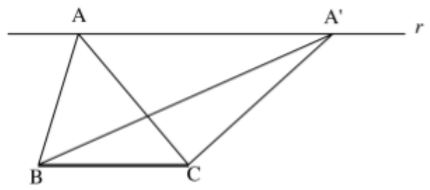
Propriedades Importantes

Propriedade 1

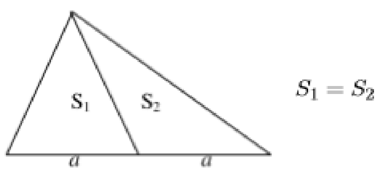
A área de um triângulo não se altera quando sua base permanece fixa e o terceiro vértice percorre uma reta paralela à base.



Na figura acima, a reta r é paralela a BC. Os triângulos ABC e $A'BC$ têm mesma área, pois possuem mesma base e mesma altura.

Propriedade 2

Em um triângulo, uma mediana divide sua área em partes iguais.

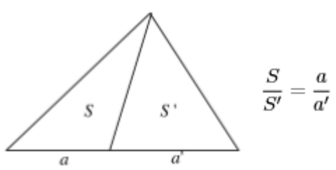


Defato, os dois triângulos interiores possuem mesma base e mesma altura. Logo, possuem mesma área.

Quando duas figuras possuem mesma área, dizemos que elas são equivalentes. Portanto, o enunciado desta propriedade pode ser: "Uma mediana divide o triângulo em dois outros equivalentes."

Propriedade 3

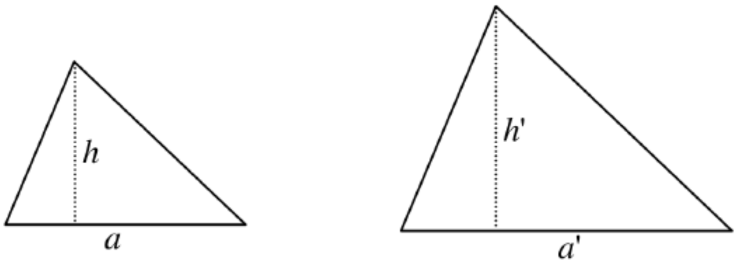
Se dois triângulos têm mesma altura, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases. A afirmação acima tem comprovação imediata a partir da fórmula que calcula a área do triângulo.



Propriedade 4

A razão entre as áreas de triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Observe, na figura a seguir, dois triângulos semelhantes com bases a e a' e alturas h e h'.



Como são semelhantes, a razão entre as bases é a mesma razão entre as alturas. Esse número é a razão de semelhança das duas figuras:

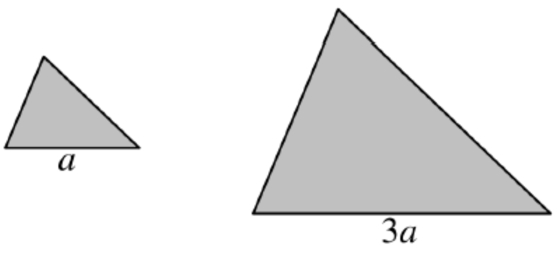
$$k = \frac{a}{a'} = \frac{h}{h'}$$

Porem, se S e S' são as áreas dos dois triângulos temos:

$$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{ah}{2}}{\frac{ah'}{2}} = \frac{a}{a'} \times \frac{h}{h'} = k \times k = k^2$$

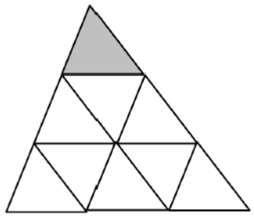
Vejamos um exemplo simples.

Os dois triângulos da figura abaixo são semelhantes. Se a área do menor é igual a 8, qual é a área do maior?



Para esta pergunta, alunos têm uma tendência irresistível de responder rapidamente que a área do triângulo maior é 24. Porém, isto não é verdade. A razão de semelhança dos dois triângulos é $k = \frac{1}{3}$ e, portanto, a razão entre suas áreas é $\frac{1}{9}$. Daí, se a área do menor é igual a 8, a área do maior é 72.

Você pode ver esta relação na figura a seguir. Realmente, o triângulo pequeno cabe 9 vezes dentro do grande.



A propriedade 4, que mostramos para triângulos, vale naturalmente para polígonos, pois estes podem ser divididos em triângulos. Mas, é importante saber que esta propriedade vale para quaisquer figuras semelhantes.

A razão entre as áreas de figuras semelhantes quaisquer é igual ao quadrado da razão de semelhança.

O exercício a seguir, caiu em um vestibular da FGV-RJ.

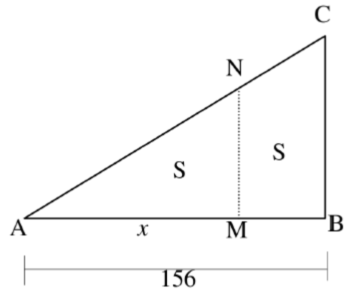
Exercício:

Em algum momento, na primeira metade do século passado, uma pessoa chamada Afrânio tinha um valioso terreno desocupado, perto do centro da cidade do Rio de Janeiro. Com a urbanização da cidade, ruas novas foram abertas e o terreno de Afrânio ficou reduzido a um triângulo ABC, retângulo em B, ainda de grande valor, pois o lado AB media 156 metros. Pois bem, Afrânio morreu e em seu testamento os advogados encontraram as instruções para dividir o terreno *igualmente* entre seus dois filhos. Era assim: um muro deve ser construído perpendicularmente ao lado AB, de forma que os dois terrenos resultantes da divisão tenham mesmo valor; o que tem a forma de um trapézio será do meu filho mais velho e o outro será do mais novo.

Os advogados concluíram que os terrenos deviam ter mesma área, pois o testamento dizia que deveriam ter mesmo valor. Mas não foram capazes de decidir em que posição deveria ficar o muro. Conta meu avô que o episódio ganhou as páginas dos jornais por vários dias, com leitores opinando de diversas maneiras sobre a posição correta do muro. Ele falava e se divertia muito com as opiniões absurdas mas, ao mesmo tempo, me instigava a resolver o problema. E o problema retorna para vocês.

Em que posição, relativamente ao lado AB do terreno, o muro deve ser construído?

Solução:
Na figura acima, MN é o muro que deve ser construído perpendicularmente ao lado AB. Seja $AM = x$, de forma que o triângulo AMN e o trapézio MBCN tenham mesma área S. Os triângulos AMN e ABC são semelhantes e a razão de semelhança entre eles é $\dfrac{x}{156}$.



Como a razão entre suas áreas é o quadrado da razão de semelhança devemos ter:

$$\frac{S}{2S} = \left(\frac{x}{156}\right)^2$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados ficamos com

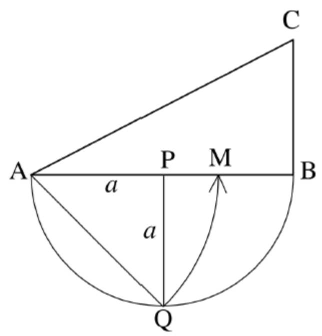
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{156}$$

o que dá $x = 78\sqrt{2} \cong 110$. Temos a solução. O muro deve ser construído a 110 metros de A. As áreas dos dois terrenos serão iguais e Afrânio ficará feliz em ver sua vontade atendida.

A construção geométrica do exercício

Acabamos de resolver o problema da divisão do terreno em duas partes de mesma área. Mas como poderemos fazer isto utilizando apenas a régua e o compasso? Imagine que o engenheiro tem a planta do terreno e deseja desenhar o muro na posição exata, sem contas, sem aproximações. Vamos ver como se faz isto.

Resolva o problema novamente considerando $AB = 2a$. Você vai encontrar $AM = a\sqrt{2}$. Faça então o seguinte. Pelo ponto P, médio de AB trace uma perpendicular PQ a AB de comprimento a como na figura seguinte:

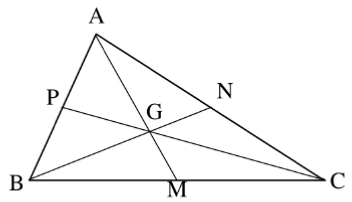


Como $AQ = a\sqrt{2}$, transfira com o compasso essa medida para a reta AB, encontrando a posição exata de M.

Exercício:

As medianas de um triângulo dividem esse triângulo em 6 outrostriângulos. Mostre que todos têm mesma área.

Solução: Representemos por (ABC) a área de um triângulo ABC.



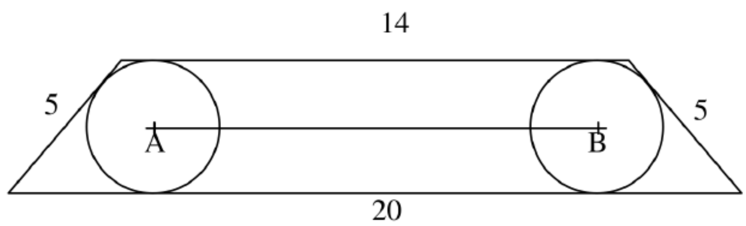
Seja $(ABC) = S$. O ponto de interseção das medianas é G, o baricentro. Sabemos que BG = 2/3 · BN. Logo,

$$(ABC) = \frac{2}{3}(ABN) = \frac{2}{3} \times \frac{S}{2} = \frac{S}{3}$$

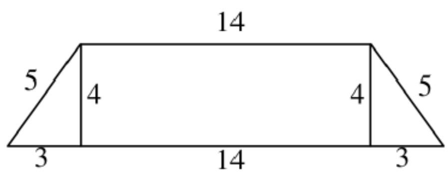
Analogamente, $(BCG) = (CAG) = \dfrac{S}{3}$. Mas GP é mediana no triângulo ABG. Daí, $(APG) = (BPG) = \dfrac{S}{6}$. Assim, os seis triângulos têm área $\dfrac{S}{6}$.

Exercício:

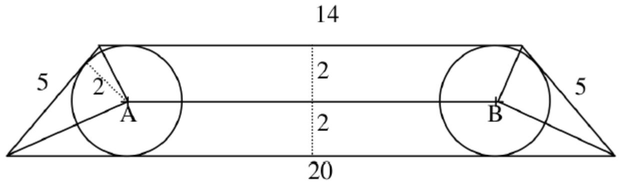
A figura a seguir mostra um trapézio com bases medindo $20cm$ e $14cm$ e com os outros dois lados medindo $5cm$ cada um. Duas circunferências com centros A e B são tangentes às bases, uma ao lado esquerdo e outra ao lado direito. Pergunta-se qual é o comprimento do segmento AB.



Solução: Vamos inicialmente calcular a altura do trapézio, que é o diâmetro de cada circunferência. Dividindo o trapézio em um retângulo e dois triângulos retângulos iguais, temos a evidente situação seguinte:



A altura do trapézio mede $4cm$ e o raio de cada circunferência mede $2cm$. Vamos agora ligar os dois vértices da esquerda ao ponto A e os dois vértices da direita ao ponto B. Vemos agora o trapézio original dividido em dois outros trapézios e dois triângulos iguais.



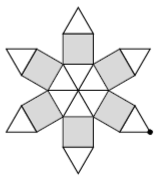
Lembrando que a área do trapézio é o produto da base média pela altura e observando que os dois triângulos de vértices A e B têm base igual a 5 e altura igual a 2, vamos escrever a equação que diz que a soma das áreas dessas quatro figuras é igual à área do trapézio original. Fazendo $AB = x$, temos:

$$\frac{(20+x)\times 2}{2}+\frac{(14+x)\times 2}{2}+2\times\frac{5\times 2}{2}=\frac{(20+14)\times 4}{2}$$

Isto dá $x = 12$, resolvendo nosso problema.

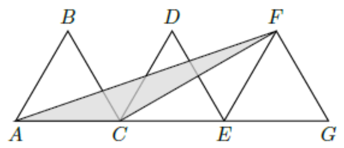
Exercício:

(Banco de Questões 2011, Nível 1, questão 12, página 15) As flores de Geometrix têm formatos muito interessantes. Algumas delas possuem a forma mostrada na figura, na qual há seis quadrados e doze triângulos equiláteros. Uma abelha pousou no ponto destacado e andou sobre a borda da flor no sentido horário até voltar ao ponto inicial. Sabendo que a região cinza tem $24cm^2$ de área, qual é a distância percorrida pela abelha?



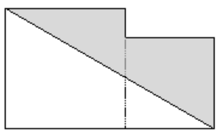
Solução: Como a região cinza é formada por seis quadrados, a área de cada um destes quadrados é igual a $24 \div 6 = 4cm^2$. Como a área de um quadrado de lado l é dada por l^2, vemos que cada um dos quadrados da figura tem $2cm$ de lado. Por uma contagem direta vemos que uma volta completa na borda da flor contém $6 \times 4 = 24$ segmentos. Logo, para dar uma volta completa na flor, a abelha percorreu uma distância igual a $24 \times 2 = 48cm$.

Exercício: Na figura a seguir, ABC, CDE e EFG são triângulos equiláteros de área de $60cm^2$ cada. Se os pontos A, C, E e G são colineares, determine a área do triângulo AFC.

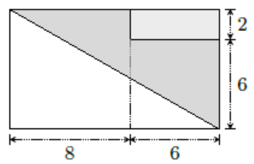


Solução: O triângulo AFC possui a mesma base e a mesma altura que os triângulos ABC, CDE e EFG. Portanto, todos estes quatro triângulos possuem a mesma área de $60cm^2$.

Exercício: (OBMEP 2014-N1Q7-1 fase) A figura é formada por dois quadrados, um de lado $8cm$ e outro de lado $6cm$. Qual é a área da região cinza?



Solução: Se juntarmos à região cinza o retângulo cujos lados medem $6cm$ e $2cm$, como na figura a seguir, teremos um novo retângulo com lados medindo $14cm$ e $8cm$ cuja área é $14 \times 8 = 112cm^2$.



A área desejada é igual à diferençaa entre a área da metade desse último retângulo e a área do retângulo 2×6 que foi acrescentado, isto é, $\frac{112}{2} - 6 \times 2 = 44cm^2$.