

Questões da Avaliação Presencial 3 – Nível 3 – 11 PIC

Questão 1 (3,0 pontos):

Encontre todos os números inteiros positivos m e n que satisfazem $m^2 = 57 + n^2$.

(Dica: use que $m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$).

Resolução esperada:

Sejam m e n inteiros positivos tais que $m^2 = 57 + n^2$. Então, $(m + n)(m - n) = 57$. Como $m + n$ e 57 são positivos, então $m - n$ é positivo. Além disso, $m - n < m + n$. A fatoração em primos de $(m + n)(m - n) = 57$ é $(m + n)(m - n) = 3 \cdot 19$. Como $m + n, m - n > 0$, $m - n < m + n$ e, considerando a unicidade da fatoração em primos de $(m + n)(m - n) = 3 \cdot 19$, segue que $(m + n, m - n) = (57, 1)$ ou $(m + n, m - n) = (19, 3)$. No primeiro caso, $(m, n) = (29, 28)$ e, no segundo caso, $(m, n) = (11, 8)$. É imediato verificar que, em cada caso, a equação $m^2 = 57 + n^2$ é satisfeita.

Critério de pontuação:

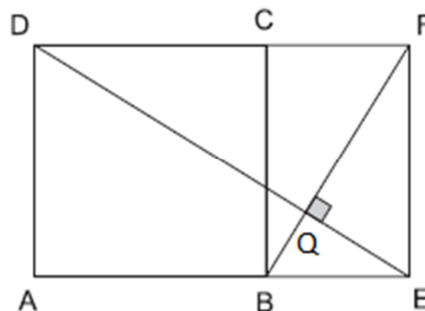
- Escreveu a equação $m^2 = 57 + n^2$ na forma $(m + n)(m - n) = 57$: 0,4 ponto;
- Escreveu $(m + n)(m - n) = 57 = 3 \cdot 19$: 1,0 ponto;
- Concluiu que $(m + n, m - n) = (57, 1)$ ou $(m + n, m - n) = (19, 3)$: 1,0 ponto, sendo 0,5 ponto para cada um dos casos;
- Concluiu que $(m, n) = (29, 28)$ ou $(m, n) = (11, 8)$: 0,6 ponto, sendo 0,3 ponto para cada um dos casos.

Questão 2 (3,0 pontos):

Na figura abaixo, $Aefd$ é um retângulo, $ABCD$ é um quadrado cujo lado mede 1 cm.

Qual é a medida do segmento de reta BE ?

(Dica: mostre que os triângulos AED e EFB são semelhantes).



Resolução esperada:

Os ângulos \widehat{AED} e \widehat{EFB} são iguais. Logo, os triângulos retângulos AED e EFB são semelhantes e, portanto $\frac{BE}{EF} = \frac{AD}{AE}$. Fazendo $BE = x$ e observando que $AD = EF = 1$,

temos que $\frac{x}{1} = \frac{1}{x+1}$, ou seja, $x^2 + x - 1 = 0$. A solução positiva dessa equação é $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Portanto, a medida do segmento BE é igual a $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ cm.

Critério de pontuação:

- Concluiu que os ângulos \widehat{AED} e \widehat{EFB} são iguais: 0,5 ponto;
- Concluiu que os triângulos AED e EFB são semelhantes: 0,5 ponto;
- Escreveu a razão $\frac{BE}{EF} = \frac{AD}{AE}$: 0,5 ponto;
- Escreveu a razão $\frac{x}{1} = \frac{1}{x+1}$: 0,5 ponto;
- Resolveu a equação $x^2 + x - 1 = 0$: 0,5 ponto;
- Concluiu que a solução positiva da equação $x^2 + x - 1 = 0$ é a medida de BE : 0,5 ponto.

Questão 3 (4,0 pontos):

Para determinada avaliação em uma disciplina são sorteadas 3 dentre 7 questões e, para ser aprovado, o aluno deve acertar pelo menos 2 das 3 questões sorteadas. Qual a probabilidade de ser aprovado um aluno que sabe resolver apenas 4 das 7 questões?

Resolução esperada:

Para resolver o problema, iremos contar os casos favoráveis e os casos possíveis. O espaço amostral consiste de todos os conjuntos de 3 questões com as quais podemos montar a avaliação. Assim, o número de casos possíveis é igual a $C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$. Para o aluno ser aprovado, ele deve acertar pelo menos 2 das 3 questões, ou seja, ele deve acertar 2 ou 3 questões. Para ele acertar as 3 questões, elas devem ser escolhidas dentre as 4 questões que ele sabe resolver. Isto pode ser feito de $C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$ formas. Para ele acertar 2 das 3 questões, 2 das questões devem ser escolhidas dentre as 4 questões que ele sabe resolver e a outra questão deve ser escolhida dentre as 3 questões que ele não sabe resolver. Pelo Princípio Multiplicativo, isto pode ser feito de $C_4^2 \cdot C_3^1 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{3}{1} = 18$ formas. Pelo Princípio Aditivo, o número de casos favoráveis é igual a $4 + 18 = 22$. Finalmente, a probabilidade procurada é

$$P = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{22}{35}.$$

Critério de pontuação:

- Contou o número de casos possíveis: 1,0 ponto;
- Contou o número de modos de escolher 3 dentre as 4 questões que o aluno sabe resolver: 1,0 ponto;
- Contou o número de modos de escolher 2 dentre as 4 questões que o aluno sabe resolver e 1 dentre as 3 questões que ele não sabe resolver: 1,0 ponto;
- Utilizou o Princípio Aditivo para calcular o número de casos favoráveis: 0,5 ponto.

- Calculou a probabilidade, utilizando a noção de eventos equiprováveis: 0,5 ponto.