

## Capítulo 2

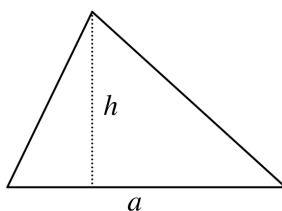
# Áreas

Os alunos, em geral, trabalham com áreas desde muito cedo. Vamos então, neste capítulo, imaginar que as fórmulas que calculam áreas das figuras simples como o quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo e trapézio sejam conhecidas.

Inicialmente, daremos toda atenção ao triângulo. Conhecendo bem o triângulo, não teremos dificuldade nos polígonos pois, afinal, eles podem ser decompostos em triângulos. Com certeza, você já sabe calcular a área de um triângulo, fazendo a metade do produto da base pela altura.

1. A fórmula tradicional.

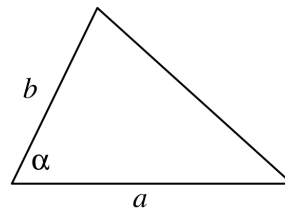
$$S = \frac{ah}{2}$$



2. Se você já conhece um pouco de trigonometria, a fórmula seguinte é muito boa.



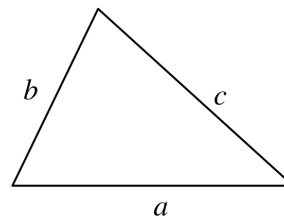
$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \text{sen}\alpha$$



3. Quando os três lados são conhecidos, calcular a altura ou um dos ângulos dá algum trabalho. Nesse momento, a fórmula de Heron é ótima (não daremos aqui a demonstração dela).

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

onde  $p = \frac{a+b+c}{2}$

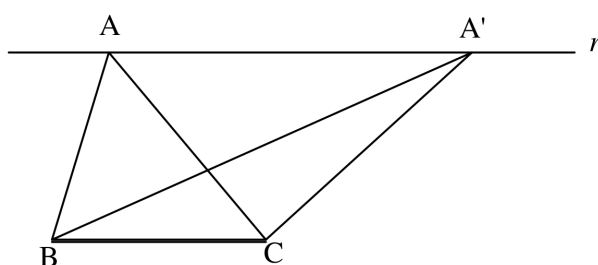


Vamos tratar agora do mais importante: as propriedades.

## 2.1 Propriedades Importantes

### Propriedade 1

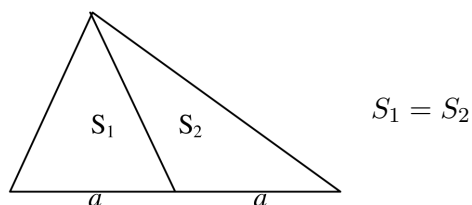
A área de um triângulo não se altera quando sua base permanece fixa e o terceiro vértice percorre uma reta paralela à base.



Na figura acima, a reta  $r$  é paralela a  $BC$ . Os triângulos  $ABC$  e  $A'BC$  têm mesma área, pois possuem mesma base e mesma altura.

### Propriedade 2

Em um triângulo, uma mediana divide sua área em partes iguais.



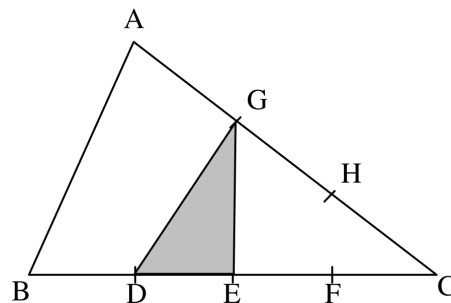
De fato, os dois triângulos interiores possuem mesma base e mesma altura. Logo, possuem mesma área.

Quando duas figuras possuem mesma área, dizemos que elas são equivalentes. Portanto, o enunciado desta propriedade pode ser: “Uma mediana divide o triângulo em dois outros equivalentes.”

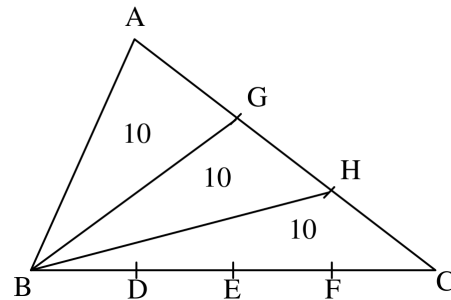
Antes de prosseguir com as propriedades, vamos resolver dois exercícios cujos enunciados não são comuns nos livros didáticos atuais.

**Exercício 1**

O triângulo  $ABC$  da figura abaixo tem área igual a 30. O lado  $BC$  está dividido em quatro partes iguais, pelos pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$ , e o lado  $AC$  está dividido em três partes iguais pelos pontos  $G$  e  $H$ . Qual é a área do triângulo  $GDE$ ?

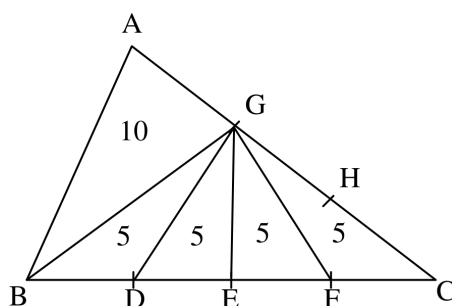


*Solução:* Observe o triângulo  $ABC$  com as cevianas  $BG$  e  $BH$ .



Pela propriedade 2 os triângulos  $BAG$ ,  $BGH$  e  $BHC$  têm mesma área. Cada um tem, portanto, área igual a 10 e o triângulo  $BGC$  tem área igual a 20.

Observe agora o triângulo  $BGC$  com as cevianas  $GD$ ,  $GE$  e  $GF$ .



Pela mesma propriedade, os triângulos  $GBD$ ,  $GDE$ ,  $GEF$  e  $GFC$  têm mesma área. Logo, cada um deles tem área 5. A área do triângulo  $GDE$  é igual a 5.

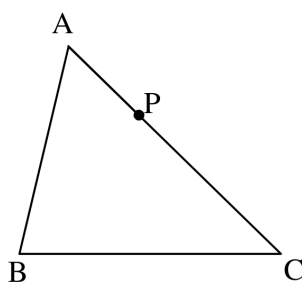
Repare que a solução do problema não necessitou de fórmulas. Uma propriedade simples e convenientemente aplicada resolveu a questão. Vamos ver outro problema.

## Exercício 2

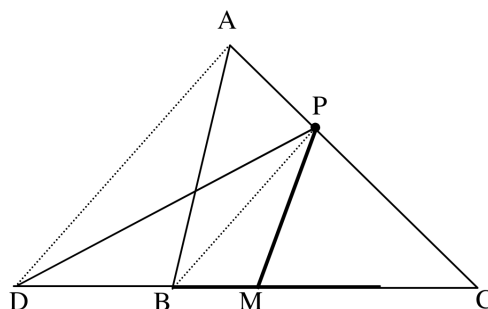
É dado um triângulo  $ABC$  e um ponto  $P$  do lado  $AC$  mais próximo de  $A$  que de  $C$ . Traçar uma reta por  $P$  que divida o triângulo  $ABC$  em duas partes de mesma área.

▲ SEC. 2.1: PROPRIEDADES IMPORTANTES

29



*Solução:* Fazemos o seguinte. Trace  $BP$  e uma paralela a  $BP$  por  $A$  que encontra a reta  $BC$  em  $D$ .

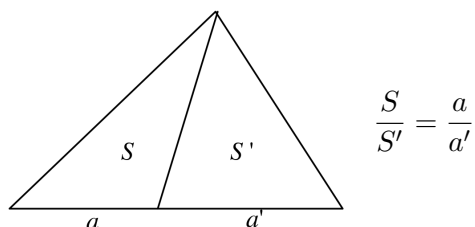


Os triângulos  $ABP$  e  $DBP$  têm áreas iguais pela propriedade 1. Assim, o triângulo  $PDC$  tem mesma área que o triângulo  $ABC$ . Mas, tomando o ponto médio  $M$  de  $DC$ , a reta  $PM$  divide  $PDC$  em duas partes de mesma área (propriedade 2). Logo,  $PM$  divide também  $ABC$  em duas partes de mesma área.

Vamos continuar com mais duas propriedades importantes.

### Propriedade 3

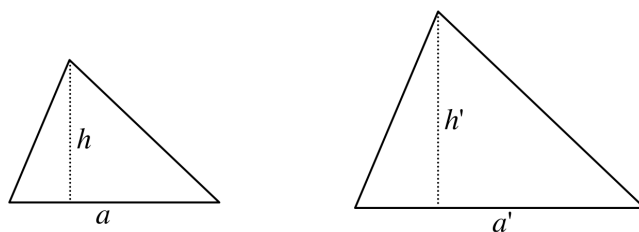
Se dois triângulos têm mesma altura, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases. A afirmação acima tem comprovação imediata a partir da fórmula que calcula a área do triângulo.



### Propriedade 4

A razão entre as áreas de triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Observe, na figura a seguir, dois triângulos semelhantes com bases  $a$  e  $a'$  e alturas  $h$  e  $h'$ .



Como são semelhantes, a razão entre as bases é a mesma razão entre

as alturas. Esse número é a razão de semelhança das duas figuras:

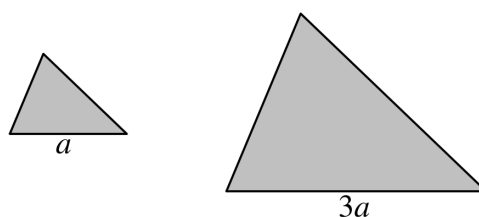
$$k = \frac{a}{a'} = \frac{h}{h'}.$$

Porém, se  $S$  e  $S'$  são as áreas dos dois triângulos temos:

$$\frac{S}{S'} = \frac{ah/2}{a'h'/2} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{h}{h'} = k \cdot k = k^2.$$

Vejamos um exemplo simples.

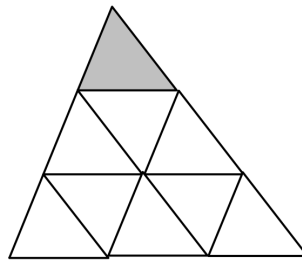
Os dois triângulos da figura abaixo são semelhantes. Se a área do menor é igual a 8, qual é a área do maior?



Para esta pergunta, alunos têm uma tendência irresistível de responder rapidamente que a área do triângulo maior é 24. Porém, isto não é verdade. A razão de semelhança dos dois triângulos é  $k = 1/3$  e, portanto, a razão entre suas áreas é  $1/9$ . Daí, se a área do menor é igual a 8, a área do maior é 72.

Você pode ver esta relação na figura a seguir. Realmente, o triângulo pequeno cabe 9 vezes dentro do grande.





A propriedade 4, que mostramos para triângulos, vale naturalmente para polígonos, pois estes podem ser divididos em triângulos. Mas, é importante saber que esta propriedade vale para quaisquer figuras semelhantes.

*A razão entre as áreas de figuras semelhantes quaisquer é igual ao quadrado da razão de semelhança.*

O exercício a seguir, caiu em um vestibular da FGV-RJ.

### Exercício 3

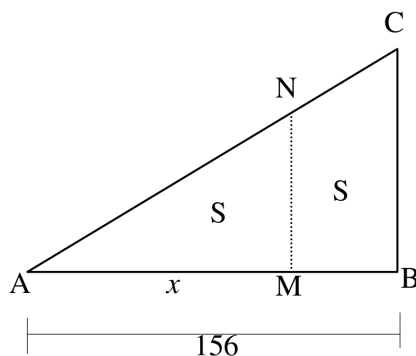
Em algum momento, na primeira metade do século passado, uma pessoa chamada Afrânio tinha um valioso terreno desocupado, perto do centro da cidade do Rio de Janeiro. Com a urbanização da cidade, ruas novas foram abertas e o terreno de Afrânio ficou reduzido a um triângulo  $ABC$ , retângulo em  $B$ , ainda de grande valor, pois o lado  $AB$  media 156 metros. Pois bem, Afrânio morreu e em seu testamento os advogados encontraram as instruções para dividir o terreno “igualmente” entre seus dois filhos. Era assim: “um muro deve ser construído perpendicularmente ao lado  $AB$ , de forma que os dois terrenos resultantes da divisão tenham mesmo valor; o que

tem a forma de um trapézio será do meu filho mais velho e o outro será do mais novo”.

Os advogados concluíram que os terrenos deviam ter mesma área, pois o testamento dizia que deveriam ter mesmo valor. Mas não foram capazes de decidir em que posição deveria ficar o muro. Conta meu avô que o episódio ganhou as páginas dos jornais por vários dias, com leitores opinando de diversas maneiras sobre a posição correta do muro. Ele falava e se divertia muito com as opiniões absurdas mas, ao mesmo tempo, me instigava a resolver o problema. E o problema retorna para vocês.

Em que posição, relativamente ao lado  $AB$  do terreno, o muro deve ser construído?

*Solução:*



Na figura acima,  $MN$  é o muro que deve ser construído perpendicularmente ao lado  $AB$ . Seja  $AM = x$ , de forma que o triângulo  $AMN$  e o trapézio  $MBCN$  tenham mesma área  $S$ . Os triângulos  $AMN$  e  $ABC$  são semelhantes e a razão de semelhança entre eles é  $x/156$ .

Como a razão entre suas áreas é o quadrado da razão de semelhança devemos ter:

$$\frac{S}{2S} = \left(\frac{x}{156}\right)^2.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados ficamos com

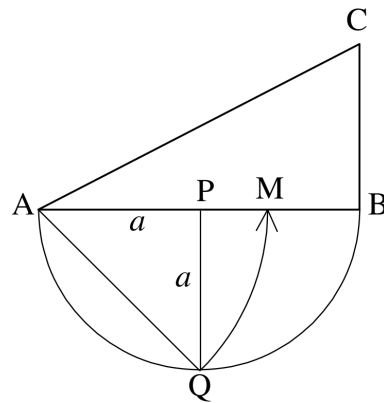
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{156}$$

o que dá  $x = 78\sqrt{2} \cong 110$ . Temos a solução. O muro deve ser construído a 110 metros de  $A$ . As áreas dos dois terrenos serão iguais e Afrânio ficará feliz em ver sua vontade atendida.

### A construção geométrica do exercício 3

Acabamos de resolver o problema da divisão do terreno em duas partes de mesma área. Mas como poderemos fazer isto utilizando apenas a régua e o compasso? Imagine que o engenheiro tem a planta do terreno e deseja desenhar o muro na posição exata, sem contas, sem aproximações. Vamos ver como se faz isto.

Resolva o problema novamente considerando  $AB = 2a$ . Você vai encontrar  $AM = a\sqrt{2}$ . Faça então o seguinte. Pelo ponto  $P$ , médio de  $AB$  trace uma perpendicular  $PQ$  a  $AB$  de comprimento  $a$  como na figura seguinte:

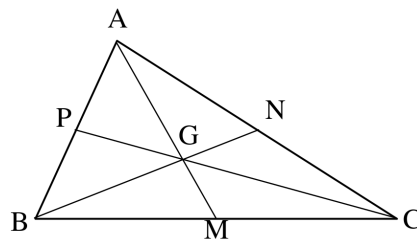


Como  $AQ = a\sqrt{2}$ , transfira com o compasso essa medida para a reta  $AB$ , encontrando a posição exata de  $M$ .

#### Exercício 4

As medianas de um triângulo dividem esse triângulo em 6 outros triângulos. Mostre que todos têm mesma área.

*Solução:* Representemos por  $(ABC)$  a área de um triângulo  $ABC$ .



Seja  $(ABC) = S$ . O ponto de interseção das medianas é  $G$ , o

baricentro. Sabemos que  $BG = 2/3 \cdot BN$ . Logo,

$$(ABC) = \frac{2}{3}(ABN) = \frac{2}{3} \cdot \frac{S}{2} = \frac{S}{3}.$$

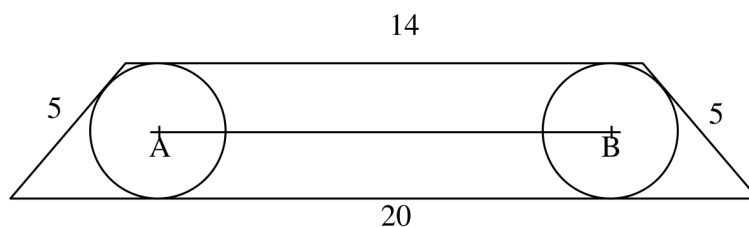
Analogamente,  $(BCG) = (CAG) = S/3$ . Mas  $GP$  é mediana no triângulo  $ABG$ . Daí,  $(APG) = (BPG) = S/6$ . Assim, os seis triângulos têm área  $S/6$ .

### Usando Áreas

O estudante pensa, em geral, que um problema sobre áreas significa sempre calcular a área de alguma figura. Na verdade não é só isso. A ferramenta “área” pode ser usada na solução de diversos problemas de geometria plana de aparência algo complicada. Veja um exemplo.

### Exercício 5

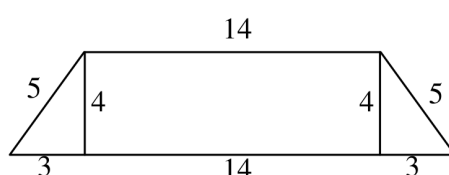
A figura a seguir mostra um trapézio com bases medindo 20 cm e 14 cm e com os outros dois lados medindo 5 cm cada um. Duas circunferências com centros  $A$  e  $B$  são tangentes às bases, uma ao lado esquerdo e outra ao lado direito. Pergunta-se qual é o comprimento do segmento  $AB$ .



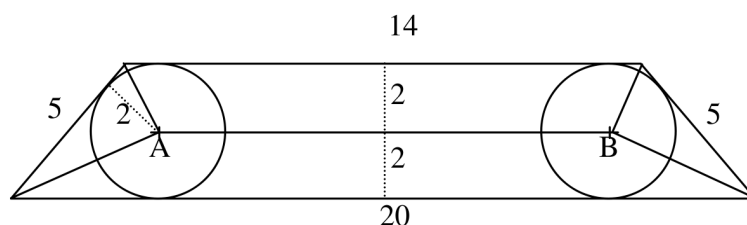
▲ SEC. 2.1: PROPRIEDADES IMPORTANTES

37

*Solução:* Vamos inicialmente calcular a altura do trapézio, que é o diâmetro de cada circunferência. Dividindo o trapézio em um retângulo e dois triângulos retângulos iguais, temos a evidente situação seguinte:



A altura do trapézio mede 4 cm e o raio de cada circunferência mede 2 cm. Vamos agora ligar os dois vértices da esquerda ao ponto  $A$  e os dois vértices da direita ao ponto  $B$ . Vamos agora o trapézio original dividido em dois outros trapézios e dois triângulos iguais.



Lembrando que a área do trapézio é o produto da base média pela altura e observando que os dois triângulos de vértices  $A$  e  $B$  têm base igual a 5 e altura igual a 2, vamos escrever a equação que diz que a soma das áreas dessas quatro figuras é igual à área do trapézio original. Fazendo  $AB = x$ , temos:

$$\frac{(20 + x) \cdot 2}{2} + \frac{(14 + x) \cdot 2}{2} + 2 \cdot \frac{5 \cdot 2}{2} = \frac{(20 + 14) \cdot 4}{2}.$$

Isto dá  $x = 12$ , resolvendo nosso problema.

É claro que outra forma de resolver pode ser conseguida com outros meios. O que desejamos enfatizar é que a ferramenta “área” muitas vezes é útil para resolver problemas diversos. Nesse caso, ela propiciou uma solução limpa e elegante.

## 2.2 Número $\pi$

O número  $\pi$  é a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. Esta razão dá sempre o mesmo valor, ou seja, independe da circunferência, porque duas circunferências quaisquer são semelhantes. Todas as circunferências são semelhantes entre si. Se  $C$  é o comprimento da circunferência de raio  $R$ , então por definição:

$$\frac{C}{2R} = \pi.$$

Mas, o que é o comprimento de uma circunferência? Nós sabemos o que é o comprimento de um segmento, mas temos apenas uma ideia intuitiva do que seja o comprimento de uma circunferência. Podemos pensar em passar um barbante bem fino em volta da circunferência, esticá-lo e medir seu comprimento com uma régua. Isto dá uma boa ideia do que seja o comprimento da circunferência, mas este método experimental permite apenas avaliar (com pouca precisão) essa medida. Vamos tornar mais preciso este conceito.

O comprimento da circunferência é, por definição, o número real cujas aproximações por falta são os perímetros dos polígonos regu-