Programa de Formação dos Professores Habilitados e dos Alunos de Licenciatura
OBMEP na Escola e PIC 2016
Grupo N3 – Ciclo 5

Ciclo 5

- **1ª semana: quarto encontro de formação entre professores, alunos de licenciatura e coordenador**

- Assuntos a serem abordados:

Aritmética: Congruências, critérios de divisibilidade e restos, congruências e somas, congruências e produtos
Contagem: Permutações de elementos nem todos distintos, permutações circulares
Geometria: Construções geométricas de alguns lugares geométricos

____

Aritmética:

- Texto:
1. Seções 4.1 a 4.4 da Apostila 1 da OBMEP, "Iniciação à Aritmética", A. Hefez. http://www.obmep.org.br/docs/apostila1.pdf

- Vídeoaulas do Portal da Matemática:
1) Tópicos Adicionais:
Módulo: "Aritmética dos Restos"
http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=63
- Vídeoaulas: "Aritmética Modular", "Cuidado! Cortes nem sempre valem em congruências. Classe inversa módulo n" e "Caso em que vale a lei do corte".

Contagem:

- Texto:
1. Capítulos 4 da Apostila 2 do PIC da OBMEP "Métodos de Contagem e Probabilidade", Paulo Cezar Pinto Carvalho, só até o exemplo 4 da pág. 34. http://www.obmep.org.br/docs/apostila2.pdf

- Vídeoaulas do Portal da Matemática:
1) Tópicos Adicionais:
Módulo: "Métodos de Contagem e Probabilidade – PIC"
http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=69
- Vídeoaula: "Aula 10 - Resolução de exercícios: Anagrama".

2) 2º Ano do Ensino Médio:

Módulo: “Princípios Básicos de Contagem”
http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=15

- Vídeoaulas: “Permutação com Repetição” e “Exercícios de Permutação com Repetição”.

Módulo: “Métodos Sofisticados de Contagem”
http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=16

- Vídeoaulas: “Permutação Circular”, “Exercícios sobre Permutação Circular – Parte 1”, “Exercícios sobre Permutação Circular – Parte 2”, “Exercícios sobre Permutação Circular – Parte 3”, “Exercícios sobre Permutação Circular – Parte 4”, “Exercícios de Combinação e Permutação Circular – Parte 1” e “Exercícios de Combinação e Permutação Circular – Parte 2”.

Geometria:

- Texto:

1. Capítulo 2 da Apostila 8 do PIC da OBMEP “Uma Introdução às Construções Geométricas”, Eduardo Wagner.
   http://www.obmep.org.br/docs/apostila8.pdf

- Vídeoaulas do Portal da Matemática:

1) Tópicos Adicionais:

Módulo: “Construções geométricas com régua e compasso”

http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=67

- Vídeoaulas:
  - Aula 2 - Construções geométricas elementares 2
  - Aula 3 - Circunferência circunscrita a um triângulo
  - Aula 4 - Cincunferência inscrita a um triângulo
  - Aula 5 - Arco capaz
  - Aula 8 - Reta tangente a uma circunferência
  - Aula 9 - Traçando uma corda
  - Aula 10 - Desenhando um triângulo 1
  - Aula 11 - Desenhando um triângulo 2

- **2ª semana: encontro entre professores e alunos**

- Assuntos a serem abordados: **Aritmética** – Congruências, critérios de divisibilidade e restos, congruências e somas, congruências e produtos.

- Texto a ser estudado com os alunos: o professor deverá explicar aos alunos os conteúdos das seções 4.1 a 4.4 da Apostila 1 da OBMEP, “Iniciação à Aritmética”, A. Hefez.
http://www.obmep.org.br/docs/apostila1.pdf

I. Um inteiro é dito um *quadrado perfeito* quando ele é o quadrado de um inteiro. Usando congruências, encontre os possíveis algarismos das unidades de um quadrado perfeito.

Solução: Seja $n = m^2$ um quadrado perfeito, com m inteiro. Tem-se $m \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ou $9 \pmod{10}$. Assim, $n = m^2 \equiv 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64$ ou $81 \pmod{10}$. Mas, $16 \equiv 6 \pmod{10}$, $25 \equiv 5 \pmod{10}$, $36 \equiv 6 \pmod{10}$, $49 \equiv 9 \pmod{10}$, $64 \equiv 4 \pmod{10}$ e $81 \equiv 1 \pmod{10}$. Assim, $n = m^2 \equiv 0, 1, 4, 5, 6$ ou $9 \pmod{10}$. Assim, os possíveis algarismos das unidades de um quadrado perfeito são $0, 1, 4, 5, 6$ ou 9.

II. Usando congruências, prove que $30^{99} + 61^{100}$ é divisível por 31.

Solução: Como $30^{99} + 61^{100} \equiv (-1)^{99} + (-1)^{100} = -1 + 1 = 0 \pmod{31}$, então $30^{99} + 61^{100}$ é divisível por 31.

III. Usando congruências, encontre o resto da divisão do número $10^{10} + 10^{100} + 10^{1000} + \cdots + 10^{10.000.000.000}$ por 7.

Solução: Tem-se $10^{10} \equiv 3^{10} = (3^3)^3 \cdot 3 = 27^3 \cdot 3 \equiv (-1)^3 \cdot 3 = -3 \pmod 7$, $10^{100} = (10^{10})^{10} \equiv (-3)^{10} = 3^{10} \equiv -3 \pmod 7$, $10^{1000} = (10^{100})^{10} \equiv (-3)^{10} = 3^{10} \equiv -3 \pmod 7$; em geral, $10^{10^n} \equiv -3 \pmod 7$, para todo n inteiro positivo. Assim, $10^{10} + 10^{100} + 10^{1000} + \cdots + 10^{10.000.000.000} \equiv (-3) + (-3) + \cdots + (-3) = 10 \cdot (-3) = -30 \equiv 5 \pmod 7$ e, logo, o resto da divisão de $10^{10} + 10^{100} + 10^{1000} + \cdots + 10^{10.000.000.000}$ por 7 é igual a 5.

(*Maneira alternativa de mostrar que* $10^{10^n} \equiv -3\ (mod\ 7)$, *para todo* n *inteiro positivo*: Seja n um inteiro positivo. Como $10^n \equiv 0^n = 0 \equiv 4 \pmod 2$ e $10^n \equiv 1^n = 1 \equiv 4 \pmod 3$, então $10^n - 4$ é múltiplo de 2 e de 3 e, logo, $10^n - 4$ é múltiplo de $\mathrm{mmc}(2,3) = 6$, ou seja, $10^n \equiv 4 \pmod 6$, isto é, $10^n = 6q + 4$, para algum inteiro q. Assim, $10^{10^n} = 10^{6q+4} = (10^6)^q \cdot 10^4 \equiv (3^6)^q \cdot 3^4 = ((3^3)^2)^q \cdot 81 = (27^2)^q \cdot 81 \equiv ((-1)^2)^q \cdot (-3) = 1 \cdot (-3) = -3 \pmod 7$).

- **3ª semana: encontro entre Professores e alunos**

- <u>Assuntos a serem abordados</u>: **Contagem** – Permutações de elementos nem todos distintos e permutações circulares.

- <u>Texto a ser estudado com os alunos</u>: o professor deverá explicar aos alunos o conteúdo do capítulo 4 da Apostila 2 do PIC da OBMEP "Métodos de Contagem e Probabilidade" de Paulo Cezar Pinto Carvalho, <u>só</u> até o exemplo 4 da pág. 34.
http://www.obmep.org.br/docs/apostila2.pdf

I. De quantas maneiras 13 pessoas podem ser distribuídas em 3 quartos A, B e C de um hotel, de modo que 5 pessoas fiquem em A, 2 em B e 6 em C?
Solução:
Ordenemos as pessoas em fila, em ordem de idade por exemplo. Associemos a cada pessoa o quarto em que ela vai ficar. Desta forma, cada distribuição das 13 pessoas pelos 3 quartos, conforme o enunciado, corresponde de maneira única a exatamente uma sequência de 13 letras, sendo 5 letras iguais a A, 2 iguais a B e 6 iguais a C. O número de tais sequências é igual $P_{13}^{5,2,6} = \frac{13!}{5!2!6!} = 36036$.

II. Um cubo $5 \times 5 \times 5$ é formado por pequenos cubos unitários. Um gafanhoto está no centro O de um dos cubos de canto. Em qualquer instante, ele pode pular para o centro de qualquer cubo que tenha uma face em comum com o cubo onde ele está, desde que este pulo aumente a distância entre o ponto O e a posição atual do gafanhoto. De quantas maneiras o gafanhoto pode chegar ao cubo unitário no canto oposto?
Solução:
Para chegar ao cubo unitário no canto oposto o gafanhoto tem que dar 12 pulos, sendo 4 em cada uma das 3 direções. Denotando os pulos na primeira direção por A, os pulos na segunda direção por B e os pulos na terceira direção por C, então cada caminho percorrido pelo gafanhoto pode ser interpretado, de maneira única, como uma sequência de 12 letras A, B e C, sendo que cada uma das letras A, B e C deve aparecer exatamente 4 vezes na sequência. O número de tais sequências é igual a $P_{12}^{4,4,4} = \frac{12!}{4!4!4!} = 34650$.

III. Se 4 meninos e 4 meninas vão brincar de roda, de quantas maneiras poderão dar as mãos, de modo que pelo menos 2 meninas estejam juntas?
Solução:
O número de maneiras de dispor as 8 crianças na roda é igual a $PC_8 = 7! = 5040$. Vamos calcular o número de maneiras de dispor as crianças na roda de modo que não estejam 2 meninas juntas. Para tal, primeiro dispomos as 4 meninas na roda, o que pode ser feito de $PC_4 = 3! = 6$ maneiras. Uma vez dispostas as meninas na roda, deve-se dispor cada um dos 4 meninos entre cada par de meninas (de modo que nunca duas meninas fiquem juntas), o que pode feito de $4! = 24$ maneiras. Assim, o número de maneiras de dispor as crianças na roda de modo que não estejam 2 meninas juntas é igual a $6 \cdot 24 = 144$ maneiras. Assim, O número de maneiras de dispor as 8 crianças na roda, de modo que pelo menos 2 meninas estejam juntas, é igual a $5040 - 144 = 4896$.

- **4ª semana: encontro entre Professores e alunos**

- Assuntos a serem abordados: **Geometria** – Construções geométricas de alguns lugares geométricos.

- Texto a ser estudado com os alunos: o professor deverá explicar aos alunos os conteúdos do capítulo 2 da Apostila 8 do PIC da OBMEP, “Uma Introdução às Construções Geométricas”, Eduardo Wagner.
http://www.obmep.org.br/docs/apostila8.pdf

I. Construa o trapézio isósceles que tem bases medindo 6,5 cm e 2,5 cm e diagonais medindo 5,5 cm.
Solução:
Em uma reta *r*, marque um segmento de reta *AB* medindo 6,5 cm e o segmento de reta *BE* medindo 2,5 cm, de modo que *B* esteja entre *A* e *E*. Trace as circunferências centradas em *A* e *E* ambas de raio medindo 5,5 cm, e seja *C* um dos pontos de interseção destas duas circunferências. Em particular, tem-se $AC = CE = 5{,}5\text{ cm}$. Trace a reta *s* paralela à reta *r* passando por *C* (a construção da reta paralela a uma reta dada passando por um ponto dado é mostrada na página 5 da Apostila 8). Trace a reta *t* passando por *B* e que é paralela à reta que contém os pontos *C* e *E*, e seja *D* o ponto de interseção das retas *s* e *t*. Como as retas *r* e *s* são paralelas e a reta *t* é paralela à reta que contém os pontos *C* e *E*, então *BECD* é um paralelogramo e, logo, $CD = BE = 2{,}5\text{ cm}$ e $BD = CE = 5{,}5\text{ cm}$. Como $AB = 6{,}5\text{ cm}$, $CD = 2{,}5\text{ cm}$ e $AC = BD = 5{,}5\text{ cm}$, então *ABCD* é o trapézio isósceles pedido.

II. Construir o triângulo ABC conhecendo o lado $BC = 7\text{ cm}$ e as alturas $BD = 5{,}4\text{ cm}$ e $CE = 6{,}7\text{ cm}$.
Solução:
Dado o segmento de reta $BC = 7\text{ cm}$, traçamos a circunferência centrada em *B* de raio BC e a circunferência centrada em *C* de raio BC. Traçamos a reta que passa pelos pontos de interseção dessas duas circunferências. Tal reta intersecta BC em seu ponto médio *M*. Traçamos a circunferência C_1 centrada em *M* de raio BM. Tal circunferência tem BC como um de seus diâmetros. Dado o segmento de reta $BD = 5{,}4\text{ cm}$, traçamos a circunferência C_2 centrada em *B* de raio BD. Dado o segmento de reta $CE = 6{,}7\text{ cm}$, traçamos a circunferência C_3 centrada em *C* de raio CE. A circunferência C_2 intersecta a circunferência C_1 no ponto *D* de modo que o ângulo $B\hat{D}C$ é reto, já que BC é diâmetro de C_1. A circunferência C_3 intersecta a circunferência C_1 no ponto *E* de modo que o ângulo $B\hat{E}C$ é reto, já que BC é diâmetro de C_1. Seja *A* o ponto de interseção das retas CD e BE. Como BD é perpendicular a AC e CE é perpendicular a AB, então o triângulo ABC tem BD e CE como alturas.

III. Construir o triângulo ABC de perímetro 11cm sabendo que os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ medem, respectivamente, 58° e 76°.
Solução:

Trace uma reta e sobre ela marque um segmento de reta PQ de medida 11cm. Construa a bissetriz do ângulo de 58°, obtendo assim um ângulo de 29°. Trace o ângulo $QPU = 29^\circ$. A construção do ângulo $QPU = 29^\circ$ a partir de um ângulo de 29° está descrita no Problema 4 da pág. 11 da Apostila 8. Construa a bissetriz do ângulo de 76°, obtendo assim um ângulo de 38°. Trace o ângulo $PQV = 38^\circ$, de modo que o ponto V esteja no mesmo semiplano do ponto U relativamente à reta PQ. Marque o ponto A de interseção da reta PU com a reta QV. Trace a mediatriz do segmento de reta AP (a construção da mediatriz de um segmento de reta está descrita na pág. 19 da Apostila 8) e marque o ponto B de interseção desta mediatriz com a reta PQ. O ponto B está no segmento PQ. Trace a mediatriz do segmento de reta AQ e marque o ponto C de interseção desta mediatriz com a reta PQ. O ponto C está no segmento BQ. Obtém-se assim um triângulo ABC. Como B pertence à mediatriz de AP, então $BP = AB$. Como $BP = AB$, então no triângulo ABP os ângulos internos nos vértices P e A são congruentes e, logo, o ângulo interno de ABP no vértice A mede 28°. Como o ângulo interno de ABC no vértice B é um ângulo externo de ABP, então, pelo Teorema do Ângulo Externo, ele mede $29^\circ + 29^\circ = 58^\circ$. Analogamente, conclui-se que $CQ = AC$ e que o ângulo interno de ABC no vértice C mede $38^\circ + 38^\circ = 76^\circ$. Como o ponto B está entre P e Q, e o ponto C está entre B e Q, então $PB + BC + CQ = PQ = 11$ cm. Como $PB = AB$, $CQ = AC$ e $PB + BC + CQ = PQ = 11$ cm, então $AB + BC + AC = 11$cm, ou seja, ABC tem perímetro 11cm. Assim, ABC é mesmo o triângulo procurado.