Algoritmo do MDC de Euclides, Relação de Bezóut e Equações Diofantinas

Na Apostila 1 e na Apostila Encontros de Aritméticas vocês encontrarão mais detalhes de cada assunto. Aqui teremos um breve resumo.

Algoritmo do MDC de Euclides

Como já vimos, MDC significa “Máximo Divisor Comum”, assim existem várias formas de calculá-lo como os métodos que veremos a seguir.

Propriedade: Se a e b são números naturais com a<b, então mdc (a,b) = mdc (a,b-a).

Propriedade: Se a e b são números naturais e se r é resto da divisão de b por a então mdc(a,b)=mdc(a,r).

Exemplo: Calcule o mdc(372,162):

Dividindo 372 por 162 obtemos, **372=2.162+48**, assim mdc(162,372)=mdc(162,48);
Dividindo 162 por 48 obtemos, **162=3.48+18**, assim mdc(48,162)=mdc(48,18);
Dividindo 48 por 18 obtemos, **48=2.18+12**, assim mdc(18,48)=mdc(18,12);
Dividindo 18 por 12 obtemos, **18=1.12+6** e assim mdc(12,18)=mdc(12,6);
Portanto mdc(372,162)=mdc(6,12)=6

Dessa maneira podemos calcular de dois modos:

mdc(162,372)= mdc(162,372-2.162)=
mdc(162,48)=mdc(48,162-3.48)=
mdc(48,18)=mdc(18,48-2.18)=
mdc(18,12)=mdc(12,18-1.12)=
mdc(12,6)=6

Ou simplesmente usando a tabelinha:

	2	3	2	1	2	quociente
372	162	48	18	12	6	
48	18	12	6	0		resto

Relação de Bezóut

Teorema: Dados inteiros a e b, quaisquer, mas não ambos nulos, existem inteiros n e m tais que mdc(a,b)=a.n+b.m.

Obs: mdc(a.b) x mdc(a,b) = ab

A relação de Bezóut nada mais é que associar um n e um m para a e b de forma que mdc(a.b)=na+bm, geralmente usa-se o processo inverso do mdc de Euclides.

Exemplo: Encontre um n e um m para o mdc(372,162):

Como já calculamos o mdc(372,162) acima, basta-nos apenas substituir os valores para encontrarmos n e m.

Relembrando:

mdc(162,372)= mdc(162,372-2.162)=
mdc(162,48)=mdc(48,162-3.48)=
mdc(48,18)=mdc(18,48-2.18)=
mdc(18,12)=mdc(12,18-1.12)=
mdc(12,6)=6

Voltando o mdc de Euclides temos a relação de Bezóut:

6=18-1.12=
=18-1(48-2.18)=
=18-1.48+2.18=
=-1.48+3.18=
=-1.48+3(162-3.48)=
=-1.48+3.162-9.48=
=3.162-10.48=
=3.162-10(372-2.162)=
=3.162-10.372+20.162=
=372(-10)+162(23)

Assim temos que a=372, b=162, n=-10 e m=23.

Equação Diofantina Linear

A equação diofantina linear é caracterizada da seguinte forma: $ax+by=c$.

Teorema: Seja x_0 e y_0 uma solução particular, arbitrariamente dada, da equação $ax+by=c$, onde $mdc(a,b)=1$. Então as soluções da equação são da forma $x=x_0+bt$ e $y=y_0-at$, para t variando nos inteiros.

Ou seja, para resolver esses tipos de equações dividiremos em 4 passo:

Dada a equação ax+by=c, temos:

1) Existe solução, se e somente se, mdc(a,b) divide c.

2) Ache um x_0 e um y_0 que são soluções particulares da equação, podemos utilizar o método da relação de Bezóut.

3) Substituir x_0 e y_0 do passo anterior em:

$$x=x_0+bt$$
$$y=y_0-at$$

4) Analisar o intervalo de t que satisfaça a equação.

Exemplo: De quantos modos podemos comprar selos de cinco e de três reais, de modo a gastar cinquenta reais?

Analisando o problema temos a seguinte equação $5x+3y=50$, dessa forma seguiremos os casos:

1) $mdc(5,3)=1$, e 1 divide 50, logo $5x+3y=50$ tem solução.

2) Uma solução particular usando Bezóut:
mdc(5,3)=mdc(3,5-1.3)=
mdc(3,2)=mdc)2,3-1.2)=
mdc(2,1)=1

Assim,
1=3-1.2=
=3-1.(5-1.3)=
=3-1.5+1.3=
=2.3-1.5

Logo, 1=2.3-1.5, porém multiplicando por 50, temos:
50=(100).3+(-50).5

Logo nosso $x_0=-50$ e $y_0=100$.

Bom poderíamos fazer isso, ou como é 5x+3y=50 é fácil de achar as soluções particulares, poderíamos ter "chutado", $x_0=10$ e $y_0=0$.

Vamos usar então, por facilitar nossas contas, $x_0=10$ e $y_0=0$ como solução particular de 5x+3y=50.

3) Substituiremos os valores acima nas equações, a=5, b=3, $x_0=10$ e $y_0=0$.

$x=x_0+bt$
$y=y_0-at$, então:

x=10+3t
y=0-5t=-5t

4) Como se trata de <u>quantidade de selos</u>, x e y tem que ser positivos.

$x \geq 0 \Leftrightarrow$
$10+3t \geq 0 \Leftrightarrow$
$t \geq \frac{-10}{3}$

E por outro lado:

$y \geq 0 \Leftrightarrow$
$-5t \geq 0 \Leftrightarrow$
$t \leq 0$

Assim t está entre $\frac{-10}{3}$ e 0, analisaremos em uma reta:

Como t é inteiro então t=0, ou t=1, ou t=2, ou t=3.

Analisando:

- Se t=0 e substituirmos em x=10+3t e y=-5t, assim x=10 e y=0.
- Se t=-1 e substituirmos em x=10+3t e y=-5t, assim x=7 e y=5.
- Se t=-2 e substituirmos em x=10+3t e y=-5t, assim x=4 e y=10.
- Se t=-3 e substituirmos em x=10+3t e y=-5t, assim x=1 e y=15.

Assim as soluções são:

- 10 selos de 5 reais.
- 7 selos de 5 reais e 5 de 3 reais.
- 4 selos de 5 reais e 10 selos de 3 reais.
- 1 selo de 5 reais e 15 selos de 3 reais.