

(c) Mostre que se  $n$  é um número par, então  $\text{mdc}(n, 2n + 2) = 2$ .

**Problema 3.17.** Sejam  $a$  e  $b$  dois números naturais não ambos nulos e seja  $d = \text{mdc}(a, b)$ . Se  $a'$  e  $b'$  são os dois números naturais tais que  $a = a' \times d$  e  $b = b' \times d$ , mostre que  $\text{mdc}(a', b') = 1$ .

### 3.4 Algoritmo da Divisão

Uma das propriedades mais importantes dos números naturais é a possibilidade de dividir um número por outro com resto pequeno. Essa é a chamada *divisão euclidiana*.

Sejam dados dois números naturais  $a$  e  $b$ , com  $a > 0$  e  $b$  qualquer. Queremos comparar o número natural  $b$  com os múltiplos do número  $a$ . Para isto, considere todos os intervalos da forma  $[na, (n + 1)a)$ , para  $n$  um número natural qualquer. Isto nos dá uma partição de  $\mathbb{N}$ , ou seja,

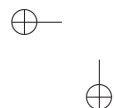
$$\mathbb{N} = [0, a) \cup [a, 2a) \cup [2a, 3a) \cup \dots \cup [na, (n + 1)a) \cup \dots$$

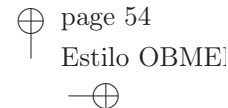
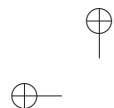
e os intervalos acima são dois a dois sem elementos em comum.

Portanto, o número  $b$  estará em um e apenas um dos intervalos acima. Digamos que  $b$  pertença ao intervalo

$$[qa, (q + 1)a).$$

Logo, existem dois números naturais  $q$  e  $r$ , unicamente determi-





nados, tais que

$$b = aq + r, \quad \text{com } 0 \leq r < a.$$

O número  $b$  é chamado *dividendo*, o número  $a$  *divisor*, os números  $q$  e  $r$  são chamados, respectivamente, *quociente* e *resto* da divisão de  $b$  por  $a$ .

Note que dados dois números naturais  $a$  e  $b$ , nem sempre  $b$  é múltiplo de  $a$ , este será o caso se, e somente se,  $r = 0$ .

Como determinar os números  $q$  e  $r$  na divisão euclidiana?

**Caso  $b < a$**  Como  $b = 0 \times a + b$ , temos que  $q = 0$  e  $r = b$ .

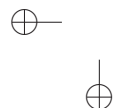
**Caso  $b = a$**  Neste caso, tomamos  $q = 1$  e  $r = 0$ .

**Caso  $b > a$**  Podemos considerar a sequência:

$$b - a, b - 2a, \dots, b - na,$$

até encontrar um número natural  $q$  tal que  $b - (q + 1)a < 0$ , com  $b - qa \geq 0$ . Assim, obtemos  $b = qa + r$ , onde  $r = b - qa$  e, portanto,  $0 \leq r < a$ .

Por exemplo, para dividir o número 54 por 13, determinamos os resultados da subtração de 54 pelos múltiplos de 13:



$$\begin{aligned} 54 - 13 &= 41, \\ 54 - 2 \times 13 &= 28, \\ 54 - 3 \times 13 &= 15, \\ 54 - 4 \times 13 &= 2 \\ 54 - 5 \times 13 &= -11 < 0. \end{aligned}$$

Assim, a divisão euclidiana de 54 por 13 se expressa como:

$$54 = 4 \times 13 + 2.$$

**Problema 3.18.** Efetue a divisão euclidiana nos seguintes casos:

- (a) de 43 por 3      (b) de 43 por 5      (c) de 233 por 4  
 (d) de 1 453 por 10, por 100, por 1 000 e por 10 000.

**Problema 3.19.** Mostre o chamado *Algoritmo da Divisão Euclidiana* nos inteiros:

Dados inteiros  $a$  e  $b$ , com  $a > 0$ , existe um único par de inteiros  $q$  e  $r$  tal que

$$b = aq + r, \quad \text{com } 0 \leq r < a.$$

SUGESTÃO: Considere os intervalos da forma  $[na, (n + 1) a)$ , com  $n$  em  $\mathbb{Z}$ .

**Problema 3.20.** Efetue a divisão euclidiana nos seguintes casos:

- (a) de  $-43$  por 3      (b) de  $-43$  por 5      (c) de  $-233$  por 4  
 (d) de  $-1 453$  por 10, por 100, por 1 000 e por 10 000.

Pelo Problema 3.19, se  $a > 0$ , os possíveis restos da divisão de um