Ciclo 1 – Encontro 2

PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO E PRINCÍPIO ADITIVO

Nível 3
PO: Márcio Reis
11° Programa de Iniciação Científica Jr.

Fórum está aberto!

Princípio multiplicativo e princípio aditivo

- Texto: PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM, de Prof. Fabrício Siqueira Benevides.

Para que serve a contagem?

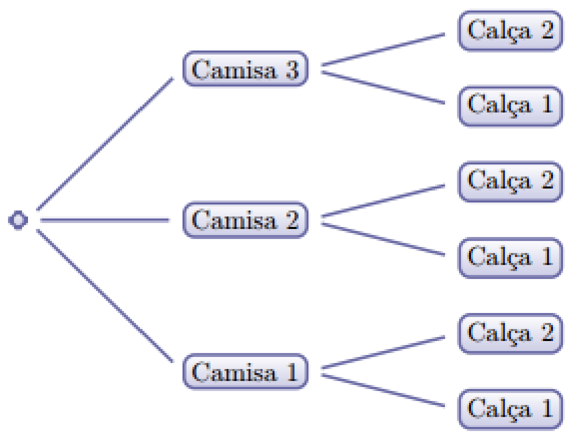
- Contar o número de maneiras em que determinadas ações podem ser executadas.
- Exemplo: Se eu tenho três camisas e duas calças, de quantas maneiras eu posso me vestir?

Camisa 1 e Calça 1
Camisa 1 e Calça 2
Camisa 2 e Calça 1
Camisa 2 e Calça 2
Camisa 3 e Calça 1
Camisa 3 e Calça 2

- Posso me vestir de seis maneiras diferentes.

Árvore da decisão – Situação 1

- Primeiro, indicamos as possíveis escolhas de camisas. A partir disso, indicamos as possíveis escolhas de calças para cada camisa. O número de ramificações é a quantidade de escolhas possíveis.

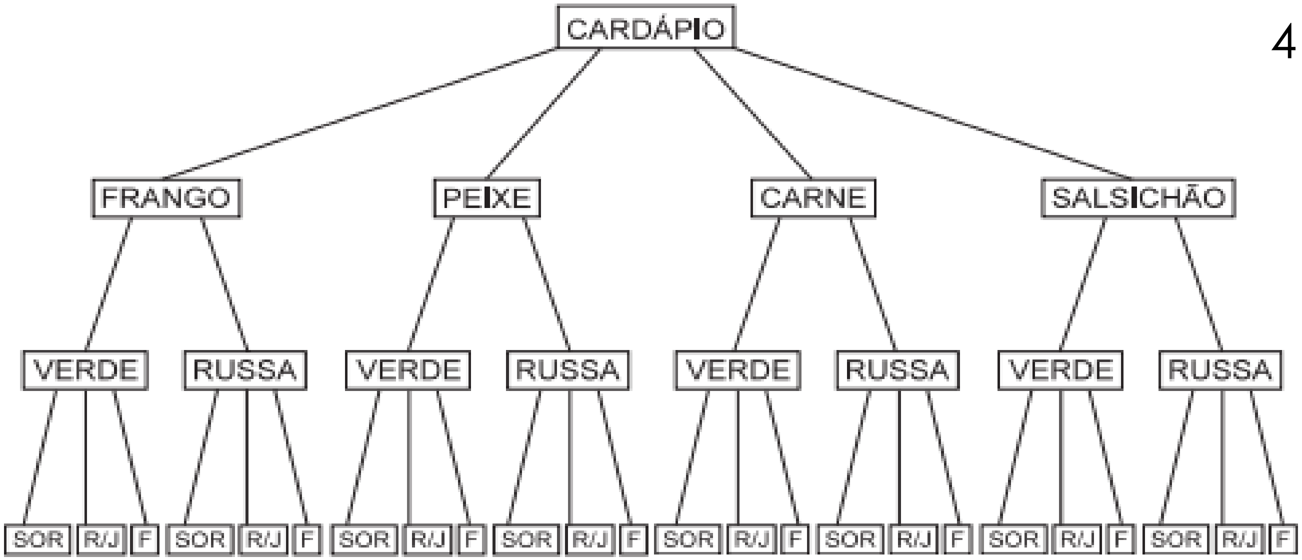


3 escolhas para camisas e 2 escolhas para calças.

3 x 2 = 6

Árvore da decisão – Situação 2

- Pratos quentes: frango, peixe, carne assada, salsichão.
- Saladas: verde e russa
- Sobremesas: sorvete, romeu e julieta, frutas.



$4 \times 2 \times 3 = 24$

Princípio fundamental da contagem

"Se desejamos executar uma sequência de $\boldsymbol{n}$ ações, onde a primeira ação pode ser executada de $\boldsymbol{m_1}$ maneiras, a segunda de $\boldsymbol{m_2}$ maneiras e assim sucessivamente, até que a n-ésima ação pode ser executada de $\boldsymbol{m_n}$ maneiras, então o número total de maneiras de executar essa sequência de ações é igual ao produto $m_1 m_2 \ldots m_n$."

Contagem – Situação 3

- No sistema de emplacamento de veículos que seria implantado em 1984, as placas deveriam ser iniciadas por 3 letras do nosso alfabeto. Caso o sistema fosse implantado, qual seria o número máximo possível de prefixos, usando somente vogais?

$$\_\_\ \_\_\ \_\_ = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

- Qual seria o número máximo possível de prefixos, usando somente vogais, sem repeti-las?

$$\_\_\ \_\_\ \_\_ = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

Contagem – Situação 4

- Marca A: 3 modelos, cada modelo disponível em 4 cores.
- Marca B: 2 modelos, cada modelo disponível em 2 cores.

- Duas situações: ou você compra da marca A, ou da marca B.
  - Marca A: 3 modelos x 4 cores = 12 possibilidades.
  - Marca B: 2 modelos x 2 cores = 4 possibilidades.

- No total, tenho 12 + 4 = 16 possibilidades.

Contagem – Situação 5

- Quantos são os inteiros positivos, menores que 1 000 que tem seus dígitos no conjunto {1, 2, 3 }?
  - 1 dígito: __ = 3 possibilidades
  - 2 dígitos: __ __ = 3 x 3 = 9 possibilidades
  - 3 dígitos: __ __ __ = 3 x 3 x 3 = 27 possibilidades

Total: 3 + 9 + 27 = 39 possibilidades.

Princípio aditivo

"Ao dividir um problema de contagem em casos, onde dentro de cada caso contamos o número de soluções que nele se enquadram e todas as soluções se enquadram em exatamente um dos casos, o número total de soluções é igual à soma dos números de soluções de cada caso."

Contagem – Situação 6

- Suponha que qualquer conjunto de cinco letras seja uma palavra. Qual o número de palavras de cinco letras que possuem pelo menos duas letras consecutivas iguais?
  - Palavras sem letras consecutivas iguais. ***Ex: ABCBD***

__ __ __ __ __ = 26 x 25 x 25 x 25 x 25

  - Todas as palavras existentes:

__ __ __ __ __ = 26 x 26 x 26 x 26 x 26

$$26^5 - 26 \times 25^4 = 1725126$$

Exercício 1

Juca quer pintar os algarismos do número 2013, como na figura ao lado, de modo que cada região seja pintada com uma das cores branca, cinza ou preta e que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

a) Observe que Juca pode pintar o algarismo 2 de $3 \times 2 \times 2$ maneiras diferentes. De quantas maneiras diferentes ele pode pintar o algarismo 1?

b) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 3?

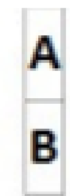
c) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 0?

d) Escreva uma expressão numérica que permita calcular de quantas maneiras Juca pode pintar o número 2013.

11º PIC Programa de Iniciação Científica da OBMEP

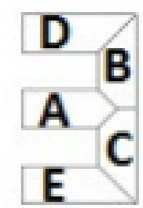
Exercício 1 - Solução

a) O algarismo 1 é composto por dois polígonos, indicados na figura por A e B. Para pintar o polígono A, há 3 opções: branco, cinza e preto. Já para pintar o polígono B, há 2 opções, uma vez que sua cor não pode coincidir com aquela já usada para pintar A. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o algarismo 1 pode ser pintado de $3 \times 2 = 6$ maneiras distintas.



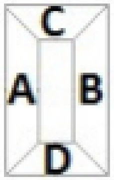
b) Iniciamos observando que há 3 opções para pintar o polígono A. Uma vez que A foi pintado, há duas opções para pintar o polígono B e, como o polígono C é vizinho de A e B, só há uma cor possível para C.

A cor do polígono D não deve coincidir com a cor de B, logo para cada cor escolhida para B, há 2 opções para a cor de D. Analogamente, há 2 opções para a cor de E.



Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2 = 24$ maneiras distintas para pintar o algarismo 3.

Exercício 1 - Solução



c) Vamos distinguir dois casos.

- *As cores de A e B coincidem*: neste caso há 3 opções de cores para A e B, e restam 2 opções de cores para C e 2 para D. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o algarismo 0 pode ser pintado de $3\times2\times2=12$ maneiras distintas.
- *As cores de A e B são diferentes*: neste caso, há 3 opções de cores para pintar A e, para cada uma dessas, há 2 opções para pintar B, restando apenas 1 opção para C e também para D. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o algarismo 0 pode ser pintado de $3\times2\times1\times1=6$ maneiras distintas.

Segue do Princípio Aditivo que o algarismo 0 pode ser pintado de $12+6=18$ maneiras distintas.

d) Basta pintar os algarismos 2, 0, 1 e 3; o 2 pode ser pintado de $3\times2\times2=12$ maneiras diferentes e o número de maneiras de pintar os outros algarismos já foi calculado nos itens anteriores. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há $12\times6\times24\times18=31104$ maneiras distintas de pintar o número 2013.

Exercício 2

Os ciclistas têm aversão ao número zero (porque é oval) e ao número oito (porque assim ficam as rodas após os acidentes). Quantos sócios podem se inscrever num clube de ciclistas se cada um deve possuir uma identificação de três dígitos, sem usar o dígito zero nem o dígito oito?

Exercício 2 - Solução

Já que os ciclistas não usam o dígito 0 e nem o 8, restam os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 9. Assim, há 8 possibilidades para a escolha de cada dígito. Temos que escolher números de três dígitos. Logo, temos 8 opções para o primeiro dígito, 8 opções para o segundo dígito e 8 opções para o terceiro dígito. Daí, como

$$8 \times 8 \times 8 = 512\,,$$

concluímos que no máximo 512 sócios podem se inscrever.

Exercício 3

Papai Noel chegou à casa de Arnaldo e Bernaldo carregando dez brinquedos distintos e enumerados de 1 a 10 e disse a eles: "o brinquedo número 1 é para você, Arnaldo e o brinquedo número 2 é para você, Bernaldo. Mas esse ano, vocês podem escolher ficar com mais brinquedos contanto que deixem ao menos um para mim". Diga de quantos modos Arnaldo e Bernaldo podem dividir entre eles o restante dos brinquedos.

Exercício 3 - Solução

Para cada um dos 8 brinquedos, do número 3 ao número 10, devemos decidir se ele vai pertencer a Arnaldo, a Bernaldo ou deve ser deixado para Papai Noel. Se multiplicarmos então

$$\underbrace{3 \times 3 \times \cdots \times 3}_{8 \text{ vezes}}$$

contaremos as formas de dividir os brinquedos entre Arnaldo, Bernaldo e Papai Noel, incluindo os casos em que Papai Noel fica sem nenhum brinquedo. Restará então contar o número de formas de dividir todos os brinquedos entre Arnaldo e Bernaldo (sem deixar nada para Papai Noel), e subtrair esse número de 3^8.

Para dividir os brinquedos entre Arnaldo e Bernaldo devemos decidir, por cada um dos 8 brinquedos, para qual dos dois o brinquedo vai. Assim temos

$$\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{8 \text{ vezes}}$$

formas de dividir os brinquedos entre Arnaldo e Bernaldo. Finalmente a resposta é

$$3^8 - 2^8 = 6305$$

formas de dividir os brinquedos.

Exercício 4

Qual é a chance de uma pessoa ganhar o prêmio máximo na *Mega Sena*, acertando as seis dezenas em uma aposta mínima?

Exercício 4 - Solução

___ ___ ___ ___ ___ ___ =

60 x 59 x 58 x 57 x 56 x 55 =

36.045.979.200

05-10-16-21-39-58 = 10-16-05-58-39-21

___ ___ ___ ___ ___ ___ = 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 720

36.045.979.200 ÷ 6! = 50.063.860

1 em 50.063.860

Exercício 5

Bruno tem 5 figurinhas idênticas com a bandeira da Alemanha, 6 com a bandeira do Brasil e 4 com a da Colômbia. Ele quer fazer um pacote com pelo menos 3 dessas figurinhas. De quantas maneiras ele pode fazer esse pacote?

A) 110
B) 120
C) 200
D) 201
E) 210

Exercício 5 - Solução

- Quantas maneiras ele pode fazer um pacote com pelo menos 3 figurinhas?
  - 5 figurinhas com a bandeira da Alemanha
    - 6 escolhas: (0, 1, 2, 3, 4, 5)
  - 6 figurinhas com a bandeira do Brasil
    - 7 escolhas: (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)
  - 4 figurinhas com a bandeira da Colômbia
    - 5 escolhas: (0, 1, 2, 3)

$\_\_\ \_\_\ \_\_ = 6 \times 7 \times 5 = 210$

Exercício 5 - Solução

Quantidade de figurinhas escolhidas para colocar no pacote	O que fica dentro do pacote	Quantidade de pacotes
0 figurinha	nada	1
1 figurinha	A ou B ou C	3
2 figurinhas	AA ou BB ou CC ou AB ou AC ou BC	6
Total		1 + 3 + 6 = 10

- 0 figurinhas: 1 opção
- 1 figurinha: 3 opções
- 2 figurinhas: __ __ = 3 x 3 = 9(?) opções (AA, AB, AC, BA, BB, BC, CC, CA, CB)

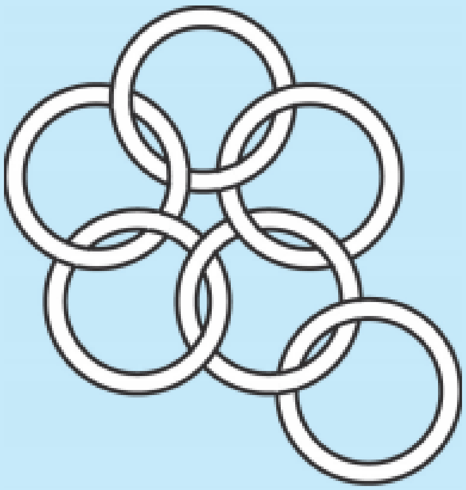
210 – 10 = 200 maneiras

11º PIC Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Exercício 6

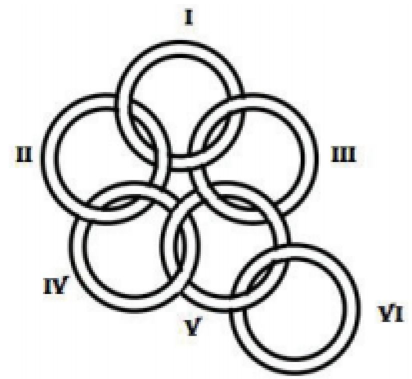
O símbolo proposto para os Jogos Escolares de Quixajuba é formado por seis anéis entrelaçados como na figura. Cada um dos anéis deve ser pintado com uma das três cores da bandeira da cidade (azul, verde ou rosa), de modo que quaisquer dois anéis entrelaçados tenham cores diferentes. Quantas são as maneiras de pintar esse símbolo?

A) 24
B) 36
C) 48
D) 60
E) 72



Exercício 6 - Solução

Numerando os anéis como na figura e iniciando a contagem pelas possibilidades de pintura do anel **I**, dividimos o problema em 3 casos.



1) O anel **III** deve ser pintado com a mesma cor que o anel **II**, o que garante que os anéis **III** e **IV** tenham cores diferentes. Então, pelo princípio multiplicativo, temos as seguintes possibilidades de escolha das cores:

I	II	III	IV	V	VI	
3	2	1	2	1	2	→24

2) O anel **III** deve ser pintado com cor diferente do anel **II** e o anel **IV** com a mesma cor que o anel **III**. Então, pelo princípio multiplicativo, temos as seguintes possibilidades de escolha das cores:

I	II	III	IV	V	VI	
3	2	1	1	2	2	→24

3) O anel **III** deve ser pintado com cor diferente do anel **II** e o anel **IV** com cor diferente do anel **III**. Então, pelo princípio multiplicativo, temos as seguintes possibilidades de escolha das cores:

I	II	III	IV	V	VI	
3	2	1	1	1	2	→12

Logo, o número de maneiras possíveis de pintar o símbolo é 24 + 24 + 12 = 60.

Exercício 7

De quantas maneiras podemos escolher quatro cartas de naipes diferentes e valores diferentes em um baralho com 52 cartas?

Exercício 7 - Solução

Precisamos ter uma carta de cada naipe. Há cartas de *Espadas, Ouro*, *Paus* e *Copas*. A ordem dos naipes não interfere no resultado.

__ __ __ __ = 13 x 12 x 11 x 10 = 17160 maneiras

Estudar para o próximo encontro!

- Seções 7.1 a 7.5 da Apostila do PIC da OBMEP “Encontros de Geometria – Parte 1”, F. Dutenhefner, L. Cadar (http://www.obmep.org.br/docs/Geometria.pdf)
- Seções 2.1 e 2.2 da Apostila Apostila 3 do PIC da OBMEP, “Teorema de Pitágoras e Áreas”, E. Wagner (http://www.obmep.org.br/docs/apostila3.pdf).