Módulo de Equações e Sistemas de Equações Fracionárias

Equações Fracionárias.

8^o **ano/**7^a **série E.F.**

Equações e Sistemas de Equações Fracionárias
Equações Fracionárias.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Resolva a equação

$$\frac{3}{x} - 2 = 7 + \frac{2}{x}$$

Exercício 2. Resolva a equação

$$\frac{x}{x-1} + \frac{2}{3} = \frac{2}{x-1}.$$

Exercício 3. Resolva a equação

$$\frac{1}{x} + \frac{2x}{x-1} = 2$$

Exercício 4. Resolva as equações fracionárias:

a) $\dfrac{x+6}{x} = \dfrac{3}{2}$.

b) $\dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{x-1}{x+2}$.

c) $\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{-3x+4}{x^2-x}$.

Exercício 5. Calcule

$$\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1}$$

Exercício 6. Resolva a equação:

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{3x}{x+1} = \frac{5-x^2}{x^2-1}.$$

Exercício 7. Resolva a equação:

$$\frac{4}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{3}{x^2-4}.$$

Exercício 8. Resolva a equação

$$\frac{3}{x-1} + \frac{4x}{x+1} = 4.$$

Exercício 9. Encontre as soluções de

$$\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+3} = \frac{6}{x^2-9}.$$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 10. Resolva a equação

$$\frac{3x-1}{2x-1} + \frac{3x+2}{2x+1} = 3 - \frac{1}{4x^2-1}.$$

Exercício 11. Supondo $a^2 - b^2 \neq 0$ e $b \neq 0$, determine o valor de z na equação

$$\frac{5a}{a-b} - \frac{5a}{a+b} = \frac{2bz}{a^2-b^2}.$$

Exercício 12. Determine o valor de x, em função a, de modo que

$$\frac{x}{a-3} = \frac{1}{a+3} - \frac{x}{a^2-9}.$$

Exercício 13. Determine o valor de x em função dos inteiros m e n de modo que

$$\frac{x}{m+n} - \frac{x+1}{m-n} = \frac{x-3}{m^2-n^2}.$$

Exercício 14. Encontre o número de valores de x que satisfazem a equação:

$$\frac{2x^2-10x}{x^2-5x} = x-3.$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. Dados os númeos reais positivos m, n, p, q e r, resolva a equação em x:

$$\frac{x-m}{n+p+q+r} + \frac{x-n-p}{q+r+m} + \frac{x-q-r}{m+n+p} = 3.$$

Exercício 16. Encontre os valores de x que satisfazem a equação

$$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2 + \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2} = 0.$$

Exercício 17. Se $ab \neq 0$ e $|a| \neq |b|$, o número de valores distintos de x que satisfazem a equação:

$$\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = \frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b}$$

é:
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4.

Exercício 18. Os números N_1 e N_2 são inteiros tais que a equação

$$\frac{35x-29}{x^2-3x+2} = \frac{N_1}{x-1} + \frac{N_2}{x-2}$$

possui infinitas soluções. Qual o valor de N_1N_2?

Exercício 19. Seja B_n a quantidade de $n-uplas$ ordenadas de inteiros positivos $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tais que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1$$

Determine se B_{10} é par ou ímpar.

Exercício 20. Prove que a equação

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} = 1$$

não admite soluções com todos os números sendo ímpares.
Dica: Faça o produto dos denominadores.

Exercício 21. Encontre todas as soluções reais de

$$x^2 + \frac{4x^2}{(x-2)^2} = 12.$$

Exercício 22. Encontre todas as soluções de

$$\frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)} + \frac{(x+b)(x+c)}{(x-b)(x-c)} + \frac{(x+c)(x+a)}{(x-c)(x-a)} = 3,$$

onde a, b e c são parâmetros reais positivos.

Respostas e Soluções.

1. Uma condição necessária para que as frações anteriores existam é que $x \neq 0$. Multiplicando a equação por x, obtemos

$$\begin{aligned} 3 - 2x &= 7x + 2 \\ 1 &= 9x \\ 1/9 &= x. \end{aligned}$$

É imediato verificar que $x = 1/9$ satisfaz a equação do problema e é diferente da restrição inicialmente mencionada. Portanto, o conjunto solução é $S = \{1/9\}$.

2. Uma condição necessária para que as frações anteriores existam é que os denominadores sejam não nulos, ou seja, $x \neq 1$. Multiplicando a equação por $3(x-1)$, obtemos

$$\begin{aligned} 3x + 2(x-1) &= 6 \\ 5x &= 8 \\ x &= 8/5. \end{aligned}$$

É imediato verificar que $x = 8/5$ satisfaz a equação do problema e é diferente da restrição inicialmente mencionada. Portanto, o conjunto solução é $S = \{8/5\}$.

3. Uma condição necessária para que a soma dada exista é que os dois denominadores sejam diferentes de zero, ou seja, $x \neq 0$ e $x \neq 1$. Multiplicando ambos os membros da equação por $x(x-1)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \cdot x(x-1) + \frac{2x}{x-1} \cdot x(x-1) &= 2 \cdot x(x-1) \\ x - 1 + 2x^2 &= 2x^2 - 2x \\ 3x &= 1 \\ x &= 1/3 \end{aligned}$$

É imediato verificar que $1/3$ verifica a equação dada e, portanto, o conjunto solução é $S = \{1/3\}$.

4.

(a) Para que o denominador não seja nulo, é necesário que $x \neq 0$. Multiplicando a equação por $2x$, temos $2x + 12 = 3x$ e, consequentemente, $x = 12$.

(b) Para que os denominadores não sejam nulos, é necessário que $x \neq 2$ e $x \neq -2$. Mulltiplicando a equação por $(x-2)(x+2)$, temos

$$\begin{aligned} (x+1)(x+2) &= (x-1)(x-2) \\ x^2 + 3x + 2 &= x^2 - 3x + 2 \\ 6x &= 0 \\ x &= 0. \end{aligned}$$

(c) Para os denominadores não serem nulos, devemos ter $x \neq 0$ e $x \neq 1$. Multiplicando a equação dada por $x(x-1) = x^2 - x$, temos

$$\begin{aligned} 3(x-1) + x &= -3x + 4 \\ 7x &= 7 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Em virtude das restrições iniciais, tal valor não é admissível para x. Portanto, o conjunto solução é vazio.

5. Reduzindo todas as frações a um mesmo denominador, temos

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} &= \\ \frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x(x+1)}{x^2-1} + \frac{x(x-1)}{x^2-1} &= \\ \frac{x^2 - x^2 - x + x^2 - x}{x^2-1} &= \\ \frac{x^2 - 2x}{x^2-1} & . \end{aligned}$$

6. Uma condição necessária para que a soma dada exista é que os denominadores sejam não nulos, ou seja, $x \neq 1$ e $x \neq -1$. Multiplicando a equação por $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{2x(x^2-1)}{x-1} - \frac{3x(x^2-1)}{x+1} &= \frac{(5-x^2)(x^2-1)}{x^2-1} \\ 2x(x+1) - 3x(x-1) &= 5 - x^2 \\ -x^2 + 5x &= 5 - x^2 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Em virtude das restrições mencionadas no início, tal valor é inadmissível para x. Portanto, o conjunto solução é vazio.

7. Uma condição necessária para que a soma dada exista é que os denominadores sejam não nulos, ou seja, $x \neq 2$ e $x \neq -2$. Multiplicando a equação por $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{4}{x-2} + \frac{1}{x+2} &= \frac{3}{x^2-4} \\ \frac{4(x^2-4)}{x-2} + \frac{x^2-4}{x+2} &= \frac{3(x^2-4)}{x^2-4} \\ 4(x+2) + (x-2) &= 3 \\ 5x &= -3 \\ x &= -3/5. \end{aligned}$$

Como tal valor não coincide com as restrições mencionadas no início, o conjunto solução é $S = \{-3/5\}$.

8. (Extraído Videoaula) Uma condição necessária para que a soma dada exista é que os dois denominadores sejam diferentes de zero, ou seja, $x \neq 1$ e $x \neq -1$. Multiplicando ambos os membros da equação por $(x-1)(x+1)$, obtemos

$$\begin{aligned} 3(x+1)+4x(x-1) &= 4(x-1)(x+1) \\ 3x+3+4x^2-4x &= 4x^2-4 \\ x &= 7. \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto solução é dado por $S = \{x \in \mathbb{R} | x = 7\}$.

9. (Extraído da Videoaula) Uma condição necessária para que a soma dada exista é que os dois denominadores sejam diferentes de zero, ou seja, $x \neq 3$ e $x \neq -3$. Multiplicando ambos os membros da equação por $(x-3)(x+3) = x^2-9$, obtemos

$$\begin{aligned} x+3+2(x-3) &= 6 \\ 3x &= 9 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Pelo comentário inicial, tal valor não é admissível e assim o conjunto solução é vazio.

10. Uma condição necessária para que a soma dada exista é que os dois denominadores sejam diferentes de zero, ou seja, $x \neq 1/2$ e $x \neq -1/2$. Multiplicando ambos os membros da equação por $(2x-1)(2x+1) = 4x^2-1$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{(4x^2-1)(3x-1)}{2x-1} + \frac{(4x^2-1)(3x+2)}{2x+1} &= 12x^2-3-1 \\ (2x+1)(3x-1)+(2x-1)(3x+2) &= 12x^2-4 \\ 6x^2+x-1+6x^2+x-2 &= 12x^2-4 \\ 2x &= 3 \\ x &= 3/2. \end{aligned}$$

Como $3/2$ é diferente das restrições mencionadas inicialmente, segue que o conjunto solução é $S = \{3/2\}$.

11. Multiplicando ambos os membros da equação por $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{5a(a^2-b^2)}{a-b} - \frac{5a(a^2-b^2)}{a+b} &= \frac{2bz(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)} \\ 5a(a+b)-5a(a-b) &= 2bz \\ 10ab &= 2bz. \\ z &= 5a. \end{aligned}$$

12. (Extraído da Videoaula) Uma condição necessária para que a soma dada exista é que os dois denominadores sejam diferentes de zero, ou seja, $a \neq 3$ e $a \neq -3$. Multiplicando ambos os membros da equação por $(a-3)(a+3) = a^2-9$, obtemos

$$\begin{aligned} x(a+3) &= a-3-x \\ x(a+4) &= a-3 \end{aligned}$$

Como $a-3 \neq 0$, segue que $a+4 \neq 0$ e daí $x = \dfrac{a-3}{a+4}$. Portando o conjunto solução pode ser descrito como $S = \{x \in \mathbb{R} | x = \dfrac{a-3}{a+4}, a \neq -3; 3; -4\}$.

13. (Extraído de Videoaula) Uma condição necessária para que a soma dada exista é que os dois denominadores sejam diferentes de zero, ou seja, $m \neq n$ e $m \neq -n$. Multiplicando ambos os membros da equação por $(m-n)(m+n) = m^2-n^2$, obtemos

$$\begin{aligned} x(m-n)-(x+1)(m+n) &= x-3 \\ xm-xn-xm-xn-(m+n) &= x-3 \\ x(2n+1) &= 3-(m+n) \end{aligned}$$

Como n é inteiro, segue que $2n+1 \neq 0$ e, consequentemente, $x = \dfrac{3-m-n}{2n+1}$.

14. (Extraído da AIME) Para que a fração do lado esquerdo exista, o seu denominador deve ser diferente de zero, ou seja, $x \neq 0$ e $x \neq 5$. Para x diferente de tais valores, o membro do lado esquerdo possui valor constante igual a 2 e, consequentemente, $x-3 = 2$. Assim, $x = 5$ e isso produz um absurdo em virtude das restrições mencionadas inicialmente. Portanto, não existe nenhum valor de x que satisfaça a equação.

15. Subtraindo o número 3 de ambos os membros da equação, temos

$$\begin{aligned} \frac{x-m}{n+p+q+r} - 1 + \frac{x-n-p}{q+r+m} - 1 \quad &+ \\ + \frac{x-q-r}{m+n+p} - 1 \quad &= \\ \frac{x-(m+n+p+q+r)}{n+p+q+r} + \frac{x-(m+n+p+q+r)}{q+r+m} \quad &+ \\ \frac{x-(m+n+p+q+r)}{m+n+p} \quad &= \\ (x-(m+n+p+q+r)) \cdot S, & \end{aligned}$$

com $S = \left(\dfrac{1}{n+p+q+r} + \dfrac{1}{q+r+m} + \dfrac{1}{m+n+p}\right) \neq 0$, pois cada fração de numerador 1 é positiva. Segue então que $x-(m+n+p+q+r) = 0$ e $x = m+n+p+q+r0$.

16. Como $\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2} = \frac{x-a}{x-b} \cdot \frac{x+a}{x+b}$, podemos fatorar a expressão dada como:

$$\frac{x+a}{x+b}\left(\frac{x+a}{x+b} - \frac{a(x-a)}{b(x-b)}\right) + \frac{x-a}{x-b}\left(\frac{x-a}{x-b} - \frac{b(x+a)}{a(x+b)}\right).$$

Além disso, podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{x+a}{x+b}\left(\frac{x+a}{x+b} - \frac{a(x-a)}{b(x-b)}\right) &= \\ \frac{a(x+a)}{b(x+b)}\left(\frac{b(x+a)}{a(x+b)} - \frac{(x-a)}{(x-b)}\right).\end{aligned}$$

Portanto, a equação inicial pode ser fatorada como

$$\left(\frac{x+a}{x+b} - \frac{a(x-a)}{b(x-b)}\right)\left(\frac{x+a}{x+b} - \frac{b(x-a)}{a(x-b)}\right) \quad = \quad 0$$

Podemos eliminar os denominadores multiplicando a última equação por $(x+b)(x-b) = x^2 - b^2$, obtendo:

$$(x^2 - (a+b)x - ab)(x^2 + (a+b)x - ab) = 0$$

Como consequência, x deve ser uma das raízes dessas duas equações do segundo grau, ou seja,

$$x = \begin{cases} \dfrac{(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 + 4ab}}{2} \\ \dfrac{-(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 + 4ab}}{2}. \end{cases}$$

17. Somando as duas frações em cada membro da equação, obtemos:

$$\frac{a(x-a) + b(x-b)}{ab} = \frac{b(x-b) + a(x-a)}{(x-a)(x-b)}.$$

Os numeradores são os mesmos e, caso sejam diferentes de zero, podem ser cancelados produzindo:

$$\begin{aligned}(x-a)(x-b) &= ab \\ x^2 - x(a+b) + ab &= ab \\ x(x-(a+b)) &= 0.\end{aligned}$$

Temos neste caso as soluções $x = 0$ e $x = a + b$. Caso os numeradores sejam nulos,

$$\begin{aligned}a(x-a) + b(x-b) &= 0 \\ x(a+b) &= a^2 + b^2 \\ x &= \frac{a^2+b^2}{a+b}.\end{aligned}$$

Como $ab \neq 0$ e $|a| \neq |b|$, segue que esta nova solução não coincide com nenhuma das soluções já encontradas e, portanto, o conjunto solução possui três elementos. Resposta letra D.

18. (Extraído da AIME) A soma das frações do membro esquerdo é

$$\frac{(x-2)N_1 + (x-1)N_2}{(x-1)(x-2)} \quad = \quad \frac{(x-2)N_1 + (x-1)N_2}{x^2 - 3x + 2}.$$

Como o denominador é o mesmo do membro do lado esquerdo, podemos concluir que os numeradores são iguais, ou seja,

$$\begin{aligned}35x - 29 &= (x-2)N_1 + (x-1)N_2 \\ x(35 - N_1 - N_2) &= 29 - 2N_1 - N_2.\end{aligned}$$

Se $35 - N_1 - N_2 \neq 0$, teremos uma única solução dada por $x = \frac{29 - 2N_1 - N_2}{35 - N_1 - N_2}$. Portanto, $35 - N_1 - N - 2 = 0$ e, consequentemente, $29 - 2N_1 - N_2 = 0$. Obtemos assim um sistema:

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = 35 \\ 2N_1 + N_2 = 29. \end{cases}$$

Resolvendo-o, encontramos $(N1, N_2) = (-6, 41)$. Portanto, $N_1 N_2 = -246$.

19. (Extraído da Putnam) Uma idéia natural é tentar agrupar as soluções em pares. Qualquer solução com $a_1 \neq a_2$ pode ser pareada com a outra solução obtida pela troca de posição entre a_1 e a_2. Logo, B_{10} tem a mesma paridade que o número de soluções com $a_1 = a_2$. Das soluções com $a_1 = a_2$, podemos parear aquelas que tem $a_3 \neq a_4$ da mesma maneira. Repetindo esse argumento com (a_5, a_6), (a_7, a_8) e (a_9, a_{10}), concluímos que a paridade de B_{10} é a mesma do número de soluções com $a_5 = a_6$, $a_7 = a_8$ e $a_9 = a_{10}$, ou seja, das soluções de:

$$\frac{2}{a_1} + \frac{2}{a_3} + \frac{2}{a_5} + \frac{2}{a_7} + \frac{2}{a_9} = 1.$$

Como anteriormente, podemos nos restringir à quantidade de soluções com $a_1 = a_3$ e $a_5 = a_7$ da equação:

$$\frac{4}{a_1} + \frac{4}{a_5} + \frac{2}{a_9} = 1.$$

Mais uma vez, podemos nos restringir à quantidade de soluções com $a_1 = a_5$ da equação:

$$\frac{8}{a_1} + \frac{2}{a_9} = 1.$$

Agora ficou fácil! Basta contar explicitamente o número de soluções da equação anterior. Como fazer isso? Bem, ela pode ser fatorada como:

$$(a_1 - 8)(a_9 - 2) = 16$$

que admite 5 soluções correspondendo as fatorações de 16 como $2^i \times 2^{4-i}$ para $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Então B_{10} é ímpar.

20. Suponha, por absurdo, que existam tais números. Assim

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f} \\ &= \frac{bcdef+acdef+abdef+abcef+abcde}{abcdef}. \end{aligned}$$

Portanto, o numerador e o denominador da última fração são iguais. Isso é um absurdo, pois o numerador é um número par e o denominador é ímpar.

21. Uma condição necessária para que a fração da equação exista é $(x-2)^2 \neq 0$, ou seja, $x \neq 2$. Multiplicando a equação por $(x-2)^2$, obtemos

$$\begin{aligned} x^2(x-2)^2+4x^2 &= 12(x-2)^2 \\ (x^2)^2-4x^2(x-2) &= 12(x-2)^2 \\ (x^2)^2-4x^2(x-2)-12(x-2)^2 &= 0 \\ (x^2+2(x-2))(x^2-6(x-2)) &= 0. \end{aligned}$$

Assim, ou $x^2+2(x-2)=0$ ou $x^2-6(x-2)=0$. A primeira equação possui as raízes $-1 \pm \sqrt{5}$ e a segunda não possui raízes reais. Portanto, o conjunto solução é $S=\{-1+\sqrt{5}, -1-\sqrt{5}\}$.

22. Uma condição necessária para que exista uma solução do problema anterior é que os denominadores das três frações não sejam nulos, ou seja, x é diferente de a, b e c. Multiplicando a equação por $(x-a)(x-b)(x-c)$, temos

$$\begin{aligned} (x+a)(x+b)(x-c)+(x+b)(x+c)(x-a) &\quad + \\ (x+c)(x+a)(x-b) &\quad = \\ 3(x-a)(x-b)(x-c) &\quad = \\ 3x^3-3x^2(a+b+c)+3x(ab+bc+ac)-3abc. \end{aligned}$$

Desenvolvendo o produto dos termos do membro esquerdo da primeira equação e cancelando os termos presentes no membro direito, obtemos

$$\begin{aligned} (a+b+c)x^2-(ab+bc+ca)x &= 0 \\ x[(a+b+c)x-(ab+bc+ac)] &= 0. \end{aligned}$$

Assim, $x=0$ ou $x=\dfrac{ab+bc+ac}{a+b+c}$. É imediato verificar que $x=0$ é solução. Para que o segundo valor também satisfaça a equação dada, é necessário que esse valor não seja igual a nenhum dos parâmetros. Isso ocorre se, e somente se,

$$(bc-a^2)(ca-b^2)(ab-c^2) \neq 0.$$

Portanto, o conjunto solução contém dois elementos se $(bc-a^2)(ca-b^2)(ab-c^2) \neq 0$ e apenas um em caso contrário.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com