2.1 Divisão Euclidiana

Um dos principais objetivos deste encontro é desenvolver nos alunos a habilidade de utilizar corretamente o Algoritmo da Divisão de Euclides e de utilizá-lo na resolução de problemas. Ao ser efetuada uma divisão, por exemplo a divisão indicada abaixo de 478 por 7, obtemos quociente 68 e resto 2.

$$\begin{array}{rr|l} & 478 & 7 \\ \cline{3-3} - & 476 & 68 \\ \cline{2-2} & 2 & \end{array}$$

Isto significa que $478 = 68 \times 7 + 2$. Esta igualdade também pode ser pensada do seguinte modo. Suponhamos que você tenha 478 bolinhas e deseje separá-las em grupos de 7. Agrupando de 7 em 7 é possível organizar estas bolinhas em 68 grupos de 7 bolinhas, totalizando $68 \times 7 = 476$ bolinhas, sobrando 2 bolinhas que não podem formar um novo grupo de 7.

A partir deste exemplo, e de outros se for o caso, podemos generalizar para concluir que no Algoritmo de Euclides da divisão de a por b, encontramos um quociente q e um resto r tal que $a = q \cdot b + r$ com $0 \leq r \leq b - 1$.

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

Exercício 1: Em cada caso calcule o quociente q e o resto r da divisão de a por b. Em seguida tire a prova, verificando a igualdade $a = q \cdot b + r$.

- $a = 307$ e $b = 4$.
- $a = 1933$ e $b = 6$.
- $a = 879$ e $b = 7$.

- $a = 1045$ e $b = 11$.
- $a = 2351$ e $b = 12$.

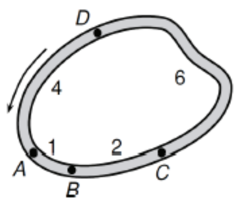
No Portal da Matemática, no 8º ano do Ensino Fundamental, no módulo "Números naturais: contagem, divisibilidade e Teorema da Divisão Euclidiana" o vídeo "Teorema da Divisão Euclidiana" apresenta o algoritmo da divisão de Euclides de uma maneira bastante interessante. Assista este vídeo e confira as suas soluções dos próximos dois exercícios.

Exercício 2: Encontre o número natural que ao ser dividido por 7 resulta um quociente 4 e resto o maior possível.

Exercício 3: Encontre os números naturais que, quando divididos por 8 deixam o resto igual ao dobro do quociente.

Observamos também que o algoritmo da divisão Euclidiana está detalhadamente explicado no vídeo 32 do canal picobmep no YouTube. Em comparação ao vídeo apresentado no Portal da Matemática, este outro é mais detalhado e mais formal. Estude este vídeo e poste suas dúvidas no Fórum Hotel de Hilbert.

Exercício 4: (OBMEP 2006 - N1Q6 - 2ª fase) A figura abaixo representa o traçado de uma pista de corrida.



Os postos A, B, C e D são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha. Por exemplo, uma corrida de 17 quilômetros pode ser realizada com partida em D e chegada em A.

(a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?

(b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são estes postos?

(c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

Solução.

(a) Uma volta completa em torno de uma pista tem extensão $1km + 2km+6km+4km = 13km$. Por isto, para percorrer $14km$ é preciso dar uma volta completa e percorrer mais $1km$. A única forma de percorrer $1km$ respeitando-se o sentido da corrida é começando em A e terminando em B. Portanto a corrida deve começar em A, dar uma volta completa e terminar em B.

(b) Como $100 = 7 \times 13 + 9$, uma corrida de $100km$ corresponde a dar 7 voltas completas na pista e percorrer mais $9km$. A única forma de percorrer $9km$ respeitando-se o sentido da corrida é começando em A e terminando em D. Portanto a corrida deve começar em A, dar 7 voltas completas e terminar em D.

(c) Como sugerido nos itens anteriores, a solução do problema está baseada na ideia de “dar uma certa quantidade de voltas” sem exceder o comprimento da corrida e depois localizar trechos convenientes para percorrer a “distância restante”. Do ponto de vista matemático, este procedimento corresponde a efetuar o algoritmo de divisão com divisor igual a 13. Por uma inspeção direta, pode-se verificar que é possível executar qualquer corrida com comprimento igual a 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou $12km$. Se a corrida tem comprimento um múltiplo qualquer de $13km$, podemos começar num ponto, dar um certo número de voltas, e voltar para o mesmo ponto de partida. E se a corrida tem um comprimento maior que 13, efetuamos a divisão deste número por 13. O quociente corresponde ao número de voltas e o resto é um pedaço de uma volta de comprimento de $1km$ até $12km$, que sempre pode ser percorrido, como comentamos anteriormente.

Por exemplo, se a extensão da corrida é $109 = 8 \times 13 + 5$, ela deve começar no posto D, dá 8 voltas completas, retornando então a D, e depois percorre o trecho de D a B, que tem $5km$.

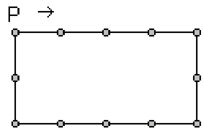
Exercício 5: Na divisão de dois números inteiros, o quociente é 16 e o resto é o maior possível. Se a soma do dividendo e do divisor é 125, determine o resto.

Solução. Vamos representar por a o dividendo e por b o divisor. Como o resto é o maior possível, então ele deve ser igual a $b-1$, que é o maior número permitido para o resto de uma divisão por b. Daí obtemos $a = 16b + (b-1)$, ou seja, $a = 17b - 1$. Como a soma $a + b = 125$ obtemos $(17b-1) + b = 125 \Rightarrow 18b = 126 \Rightarrow b = \dfrac{126}{18} = 7$. Portando o divisor é $b = 7$, o dividendo é $a = 17b - 1 = 118$, o quociente é 16 e o resto é 6.

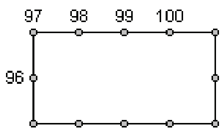
2.2 Fenômenos periódicos

Nos próximos exercícios ilustramos como o resto de uma divisão pode ser utilizado na resolução de problemas que envolvem fenômenos periódicos.

Exercício 6: Pedro caminha ao redor de uma praça retangular onde estão dispostas 12 árvores, brincando de tocar cada árvore durante seu passeio. Se no início ele toca a árvore indicada na figura, e se ele anda no sentido da seta, indique que árvore ele estará tocando ao encostar em uma árvore pela centésima vez.



Solução. Na figura, próximo de cada árvore escreva os números 1, 2, 3, ..., correspondentes aos números de árvores tocadas por Pedro (a árvore indicada pela letra P recebe o número 1, a próxima o número 2, e assim por diante). Como existem 12 árvores na praça, na árvore indicada pela letra P estarão escritos os número 1, 13, 25, ... que são todos os números que deixam resto 1 quando divididos por 12. Dividindo 100 por 12, obtemos quociente 8 e resto 4, isto é, $100 = 8 \times 12 + 4$. Daí vemos que na centésima vez, Pedro estará tocando a árvore que está 3 posições à frente daquela indicada pela letra P.



Exercício 7: Considere a seguinte sequência de números:

1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5 ...

formada alternadamente pelos algarismos (1, 2, 3, 4, 5) e pelos algarismos (5, 4, 3, 2, 1). Qual algarismo aparece na posição 2015 nesta sequência?

Solução. Na sequência dada é importante observar que o bloco de algarismos

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2$$

fica se repetindo indefinidamente, como está ilustrado na figura a seguir:

$$\boxed{1,2,3,4,5,4,3,2}\ \boxed{1,2,3,4,5,4,3,2}\ \boxed{1,2,3,4,5,4,3,2}\ \cdots$$

Dividindo 2015 por 8 (que é a quantidade de algarismos do bloco que fica se repetindo), obtemos $2015 = 251 \times 8 + 7$. Daí, para se chegar até o algarismo da posição 2015, deve-se escrever 251 blocos de oito algarismos cada, e depois mais sete algarismos. Portanto o número que está na posição 2015 é o número da sétima posição dentro do bloco, ou seja, o número 3.

Exercício 8: Qual é o algarismo da unidade de 2^{2015} ?

Solução. Calculando as primeiras potências de 2 obtemos:

$$2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32,\ 2^6 = 64,$$

$$2^7 = 128,\ 2^8 = 256,\ 2^9 = 512$$

Observando esses números, vemos que os últimos algarismos formam uma sequência periódica: 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2 etc., em que os quatro números 2, 4, 8, 6 ficam se repetindo infinitamente. Dividindo 2015 por 4 obtemos quociente 503 e resto 3, de modo que $2015 = 503 \times 4 + 3$. Na sequência acima, os expoentes que deixam resto 3 quando divididos por 4 definem potências de 2 com último algarismo 8 ($2^3 = 8$, $2^7 = 128$ etc.). Daí o algarismo da unidade de 2^{2015} é 8.

Exercício 9: João decidiu nadar de três em três dias. O primeiro dia que ele nadou foi um sábado, o segundo dia foi uma terça-feira, o terceiro dia foi uma sexta-feira, e assim por diante. Em qual dia da semana João estará nadando pela centésima vez?

Solução. Na tabela a seguir, listamos os dias da semana que João está nadando pelas primeiras 21 vezes.

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
6	4	2	7	5	3	1
13	11	9	14	12	10	8
20	18	16	21	19	17	15

Analisando a tabela vemos, por exemplo, que os múltiplos de 7 sempre estão na quarta-feira, que os números que deixam resto 1 quando divididos por 7 estão no sábado e que os números que deixam resto 2 quando divididos por 7 estão na terça-feira. Dividindo 100 por 7 obtemos quociente 14 e resto 2 ($100 = 14 \times 7 + 2$). Daí concluímos que na centésima vez, João estará nadando em uma terça-feira.

Exercício 10: O ano de 2014 começou em uma quarta-feira. Em que dia da semana cairá o último dia deste ano?

Solução. É claro que se você olhar para uma agenda você vai encontrar rapidamente a resposta do problema. Não é isso o que se pretende, é claro. Tente resolver sozinho. Assistindo o vídeo 37 do canal picobmep no YouTube você poderá ver uma solução matemática para este problema além de poder aprender algumas propriedades muito, mas muito interessantes do nosso calendário. VALE A PENA ASSISTIR!!!

Exercício 11: (Fomin, capítulo 3, problema 28) Encontre o último algarismo do número 1989^{1989}.

Solução. Para começar, note que o último algarismo do número 1989^{1989} é igual ao último algarismo do número 9^{1989}. Escrevendo as primeiras potências de 9 obtemos: $9^1 = 9$, $9^2 = 81$, $9^3 = 729$ etc. Daí observamos que os últimos algarismos destes números formam a sequência 9, 1, 9, 1 etc. Assim o último algarismo de 9^n é 9 se n é ímpar e o último algarismo de 9^n é 1 se n é par.

Observamos que para resolver este tipo de problema, não é necessário calcular as potências de 9. Basta calcular o último algarismo das potências de 9. Para fazer isso, começamos por $9^1 = 9$. Multiplicando por 9, obtemos $9 \times 9 = 81$. Para calcular o último algarismo de 9^3, multiplicamos o último algarismo de 9^2 por 9, obtendo $1 \times 9 = 9$. Então o último algarismo de 9^3 é 9. E assim, por diante, vamos olhando sempre para o último algarismo dos produtos, e efetuado o produto, consideramos somente o seu último algarismo para fazer a próxima multiplicação.

Exercício 12: (Fomin, capítulo 3, problema 30) Encontre o último algarismo do número 777^{777}.

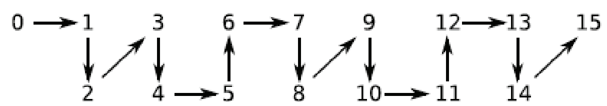
Solução. Para começar, note que o último algarismo do número 777^{777} é igual ao último algarismo do número 7^{777}. Procedendo como explicado no exercício anterior, podemos calcular o último algarismo das primeiras potências de 7.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
último algarismo de 7^n	7	9	3	1	7	9	3	1	7

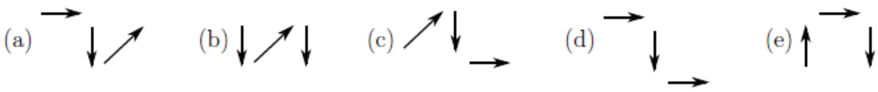
Daí vemos que o ciclo 7, 9, 3, 1 se repete infinitamente. Dividindo 777 por 4 (que é o tamanho do ciclo), obtemos quociente 194 e resto 1. Daí o último algarismo de 7^{777} é igual ao último algarismo de 7^1, que é 7.

Exercício 13: Qual é o resto da divisão de 2^{56} por 7?

Exercício 14: (Banco de Questões 2010, nível 1, problema 86) Os números de 0 a 2000 foram ligados por flechas. A figura dada mostra o começo do processo.

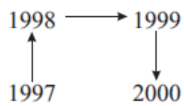


Qual é a sucessão de flechas que liga o número 1997 ao número 2000?

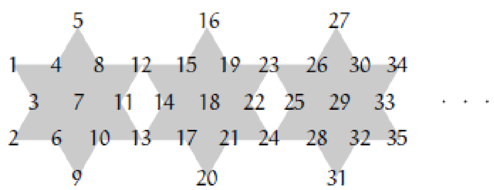


Solução. A alternativa correta é a (e). Observe que o seguinte caminho, formado por seis flechas, é um padrão que se repete na figura dada.

Este caminho-padrão sempre começa nos múltiplos de 6, ou seja, em 0, 6, 12 etc. Vamos averiguar qual é a posição de 1997 em relação ao múltiplo de 6 mais próximo. Dividindo 1997 por 6, obtemos $1997 = 6 \times 332 + 5$, correspondendo a 332 caminhos-padrão mais o resto de 5 flechas. Portanto, 1998 é múltiplo de 6 mais próximo de 1997, ocupando a primeira posição no caminho-padrão. Assim, a figura seguinte ilustra as flechas que ligam 1997 a 2000.

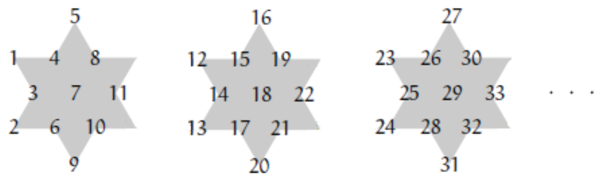


Exercício 15: (Banco de Questões 2011, nível 1, problema 10) Estrelix, um habitante de Geometrix, decidiu colocar os inteiros positivos seguindo a disposição indicada na figura.

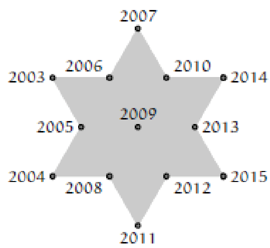


Em quais estrelas aparece o número 2011? Posicione todos os números que aparecem nas referidas estrelas?

Solução. Separe as estrelas deixando os números compartilhados sempre na estrela à direita. Fazendo isto, como indicado na figura a seguir, vemos que em cada estrela ficam escritos 11 números.



Dividindo 2011 por 11, obtemos quociente 182 e resto 9. Assim, o número 2011 é o nono número da 183^a estrela, que está representada na figura ao lado.



2.3 Aritmética dos restos

Na seção anterior estudamos o Algoritmo da Divisão Euclidiana. Na divisão de dois números naturais a por b existe um quociente q e um resto r tal que $a = bq + r$ sendo que obrigatoriamente $0 \leq r \leq b-1$. Por exemplo, na igualdade $1649 = 7 \times 235 + 4$ identificamos imediatamente o número 4 como o resto da divisão de 1649 por 7. Por outro lado, na igualdade $415 = 7 \times 58 + 9$, o número 9 não é o resto da divisão de 58