1 Permutações de elementos nem todos distintos, permutações circulares

Abaixo temos alguns exercícios discutidos no encontro:

1. De quantos modos 4 crianças podem formar uma roda?

2. Um "colar" consiste em um fio circular com diversas contas presas nele. É permitido girar o colar, mas não virá-lo de cabeça para baixo. Quantos colares diferentes podem ser feitos com 13 contas diferentes?

3. Suponha que agora é permitido virar o colar de cabeça para baixo. Quantos colares diferentes podem ser feitos com 13 contas diferentes?

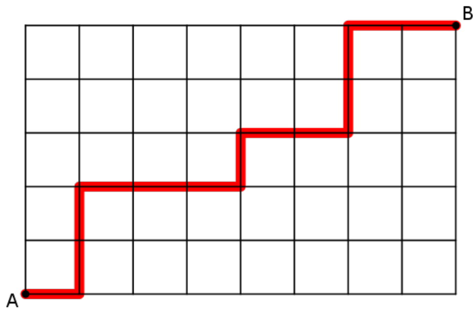
4. De quantos modos 6 pessoas (João, Maria, Pedro, Janete, Paulo e Alice) podem ser divididas em 3 duplas?

5. De quantas maneiras 13 pessoas podem ser distribuídas em 3 quartos A, B e C de um hotel, de modo que 5 pessoas fiquem em A, 2 em B e 6 em C?

6. Um cubo $5 \times 5 \times 5$ é formado por pequenos cubos unitários. Um gafanhoto está no centro O de um dos cubos de canto. Em qualquer instante, ele pode pular para o centro de qualquer cubo que tenha uma face em comum com o cubo onde ele está, desde que este pulo aumente a distância entre o ponto O e a posição atual do gafanhoto. De quantas maneiras o gafanhoto pode chegar ao cubo unitário no canto oposto?

7. Se 4 meninos e 4 meninas vão brincar de roda, de quantas maneiras poderão dar as mãos, de modo que pelo menos 2 meninas estejam juntas?

8. A figura abaixo mostra o mapa de uma cidade. Todas suas ruas são de mão única, de modo que voce só pode dirigir para o "leste"ou para o "norte". Quantos caminhos diferentes existem do ponto A para o ponto "B"?



2 Respostas e soluções

1. **Solução**: À primeira vista, pode parecer que para formar uma roda com as 4 crianças basta escolher uma ordem para elas, o que pode ser feito de $4! = 24$ modos. Entretanto, as rodas $ABCD$, $BCDA$, $CDAB$ e $DABC$ são iguais, já que cada uma resulta da anterior por uma "virada" de $1/4$ de volta.

   Para calcular o número de maneiras possíveis de formar uma roda, podemos raciocinar de dois modos diferentes. Um deles consiste em partir do resultado anterior ($4! = 24$) e perceber que cada roda está sendo contada 4 vezes. Logo, o número correto de rodas que podem ser formadas é $\frac{24}{4} = 6$. Alternativamente, podemos começar por fixar a criança A na posição à esquerda (já que em qualquer roda A pode ficar nesta posição). Agora, temos 3 lugares para as 3 crianças que restaram, para um total de $3! = 6$ possibilidades.

   De modo geral, o número de modos de colocar n objetos em círculo, considerando-se iguais disposições que coincidam por rotação (ou seja, o número de permutações circulares de n objetos) é $(n-1)!$.

2. 12!

3. $\frac{12!}{2}$

4. **Solução:** O problema é mais sutil do que parece a princípio. À primeira vista, pode parecer que a situação é a mesma do problema anterior. Uma maneira de dividir as 6 pessoas em duplas é colocar as pessoas em fila e formar uma permutação de $AABBCC$. Como visto no exemplo anterior, isto pode ser feito de $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$ modos. Mas isto não está correto, pois atribuiu nomes específicos (A, B e C) às duplas formadas. Note que colocar João e Maria na dupla A e Pedro e Janete na dupla B é equivalente a colocar João e Maria na dupla B e Pedro e Janete na dupla A. Portanto, uma mesma distribuição em duplas está sendo contada várias vezes. Mais precisamente, cada distribuição em duplas está sendo contada tantas vezes quanto o número de modos de ordenar A, B e C, ou seja, $3! = 6$ vezes. Logo, o número de possíveis distribuições em duplas é $\frac{90}{6} = 15$.

5. **Solução:** Ordenemos as pessoas em fila, em ordem de idade por exemplo. Associemos a cada pessoa o quarto em que ela vai ficar. Desta forma, cada distribuição das 13 pessoas pelos 3 quartos, conforme o enunciado, corresponde de maneira única a exatamente uma sequência de 13 letras, sendo 5 letras iguais a A, 2 iguais a B e 6 iguais a C. O número de tais sequências é igual $P_{13}^{5,2,6} = \frac{13!}{5!2!6!} = 36036$

6. **Solução:** Para chegar ao cubo unitário no canto oposto o gafanhoto tem que dar 12 pulos, sendo 4 em cada uma das 3 direções. Denotando os pulos na primeira direção por A, os pulos na segunda direção por B e os pulos na terceira direção por C, então cada caminho percorrido pelo gafanhoto pode ser interpretado, de maneira única, como uma sequência de 12 letras A, B e C, sendo que cada uma das letras A, B e C deve aparecer exatamente 4 vezes na sequência. O número de tais sequências é igual a $P_{12}^{4,4,4} = \frac{12!}{4!4!4!} = 34650$

7. **Solução:** O número de maneiras de dispor as 8 crianças na roda é igual a $7! = 5040$. Vamos calcular o número de maneiras de dispor as crianças na roda de modo que não estejam 2 meninas juntas. Para tal, primeiro dispomos as 4 meninas na roda, o que pode ser feito de $3! = 6$ maneiras. Uma vez dispostas as meninas na roda, deve-se dispor cada um dos 4 meninos entre cada par de meninas (de modo que nunca duas meninas fiquem juntas), o que pode feito de $4! = 24$ maneiras. Assim, o número de maneiras de dispor as crianças na roda de modo que não estejam 2 meninas juntas é igual a $6 \cdot 24 = 144$ maneiras. Assim, o número de maneiras de dispor as 8 crianças na roda, de modo que pelo menos 2 meninas estejam juntas, é igual a $5040 - 144 = 4896$.

8. **Solução.** Vamos chamar qualquer segmento do reticulado que liga dois nós vizinhos uma "rua". É claro que cada caminho de A para B consiste em exatamente 13 ruas, 8 das quais são horizontais e 5 das quais são verticais. Dado qualquer caminho, construiremos uma sequencia de letras N e L da seguinte maneira: quando dirigimos para o "norte", adicionamos a letra "N" à sequencia e quando dirigimos para o "leste", adicionamos a letra L à sequencia. Por exemplo, o caminho na figura corresponde à sequencia $LNNLLLNLLNNLL$. Cada sequencia construída desta maneira contém 13 letras - 8 letras L e 5 letras N. Só falta calcular o numero de tais sequencias. Qualquer sequencia fica determinada de maneira única pela lista das 5 posições ocupadas pelas letras "N" (ou, de modo alternativo, das 8 posições ocupadas pelas letras L). Cinco posições entre 13 podem ser escolhidas de $\binom{13}{5}$ maneiras. Logo o numero de sequencias e, portanto, o numero de caminhos, é igual a $\binom{13}{5}$.