Encontro 1: Paridade

Definições:
Denominamos **números pares** aos inteiros 0, 2, 4, ... ,-2, -4, -6, ..., ou seja a todos os inteiros da forma 2 k, onde k é algum inteiro. Semelhantemente, denominamos **números ímpares** aos inteiros 1, 3, 5, . . . , -1, -3, -5, ..., ou seja todos os inteiros da forma 2 k + 1, onde k é algum número inteiro.

Forma geral:

Números pares => $n = 2k$

Números ímpares => $n = 2k + 1$ sendo k um número inteiro.

Conceito de paridade: Dizemos que dois inteiros têm a mesma **paridade** quando, e só quando, **ou ambos forem pares**, **ou ambos forem ímpares**.

Paridade de somas de inteiros

Paridade de somas de dois inteiros
- par + par = par
- par + ímpar = ímpar
- ímpar + ímpar = par

Paridade de somas de vários inteiros
- A soma de qualquer quantidade de inteiros pares é um inteiro par.
- A soma de uma quantidade par de inteiros todos ímpares é um inteiro par.
- A soma de uma quantidade ímpar de inteiros todos ímpares é um inteiro par.
- A soma de uma mistura de inteiros pares e ímpares é um inteiro que tem a mesma paridade que a quantidade de parcelas ímpares que foram somadas.

Paridade de produtos e quocientes de inteiros

Multiplicando dois inteiros

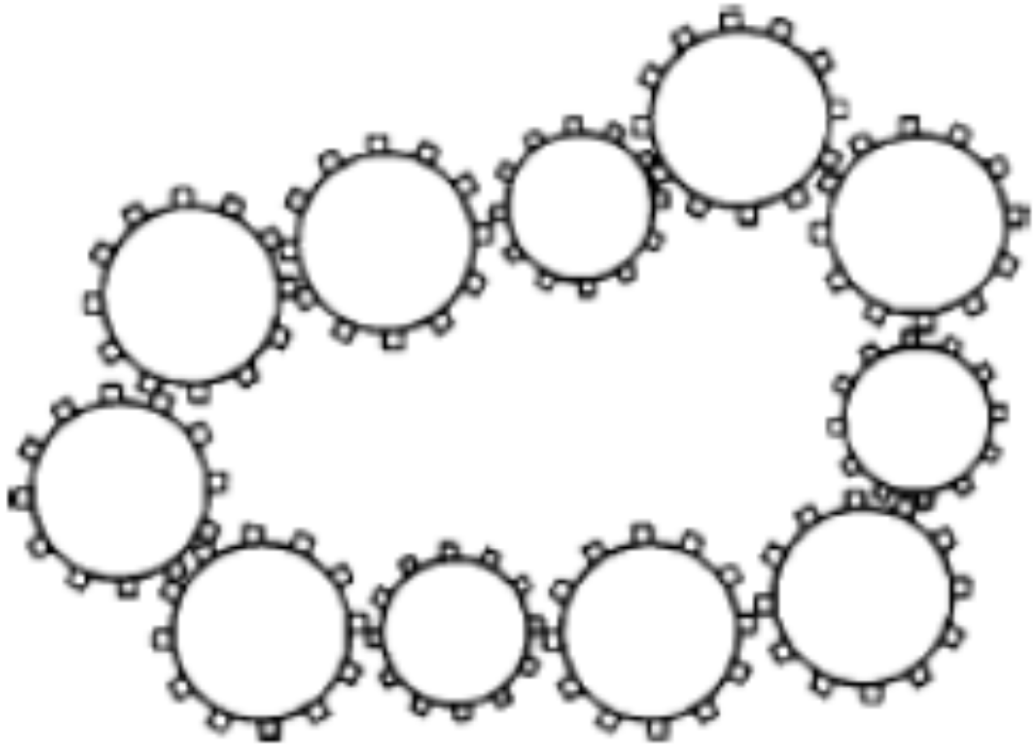
- Par x par = par
- Par x ímpar = ímpar x par = par
- Ímpar x ímpar = ímpar

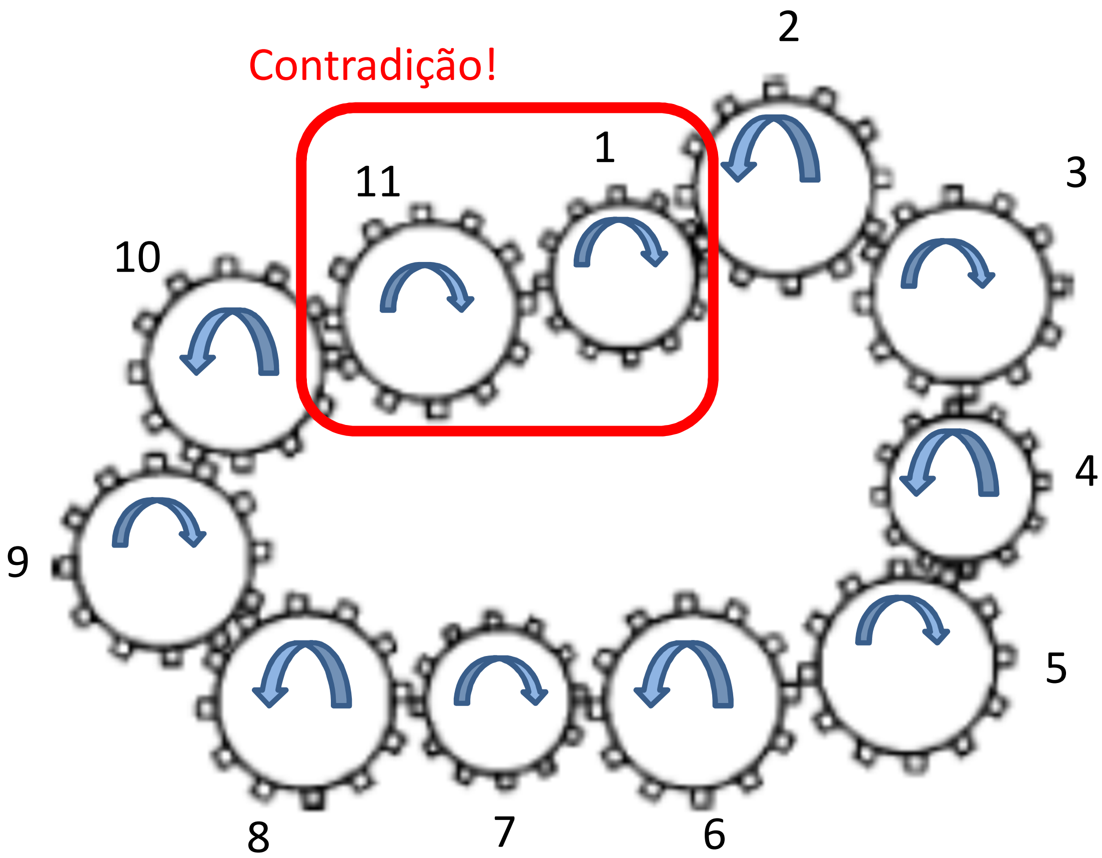
Dividindo dois inteiros

- Par / ímpar tendo resultado inteiro, este será par
- Ímpar / ímpar tendo resultado inteiro, este será ímpar
- Par / par tendo resultado inteiro, este pode ser tanto par como ímpar, dependendo de quem dividimos
- Ímpar / par nunca resulta num inteiro.

A divisão de dois números inteiros quaisquer pode não resultar num número inteiro e a noção de paridade só se aplica a números inteiros. Logo, iremos falar da paridade de um quociente de inteiros somente quando o resultado da divisão for inteiro.
Problemas envolvendo paridade de quocientes são raros, mas para fins didáticos estamos considerando análise do caso.

Problema I: Onze engrenagens estão colocadas em um plano, arrumadas em uma cadeia como está indicado na figura a seguir. Todas as engrenagens podem rodar simultaneamente?




Contradição!
2
1
11
3
10
4
9
5
8
7
6

Discussão

- Faria alguma diferença se na engrenagem supuséssemos que ela gira no sentido anti-horário?

- Pense no seguinte caso: se ao invés de 11, tivéssemos 2016 engrenagens dispostas como inicialmente no problema, todas as engrenagens rodariam simultaneamente?

- Podemos generalizar esse problema para n engrenagens ?

Problema II: Os números de 1 a 10 estão escritos em uma linha. Pode-se colocar sinais de “mais” e de “menos” entre eles de modo que o valor da expressão resultante seja igual a zero?

Quanto é a soma dos números de 1 a 10?

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

10

10

10

10

$$10 + 10 + 10 + 10 + 5 + 10 = 55$$

Quantidade de números ímpares?

Discussão

E se o exercício fosse com os dos números de 1 a 11?

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 66$$

$$1 + 2 - 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 - 9 - 10 - 11 = 0$$

ou

$$1 + 2 - 3 - 4 - 5 + 6 + 7 + 8 + 9 - 10 - 11 = 0$$

ou

$$1 + 2 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 8 - 9 + 10 - 11 = 0$$

Problema III: Todas as peças de um dominó foram colocadas em uma cadeia de modo que o número de bolinhas nas extremidades de dois dominós consecutivos são iguais. Se uma das extremidades da cadeia contém 5 bolinhas, qual é o número de bolinhas da outra extremidade da cadeia?