

# Ciclo 3 – Encontro 2

---

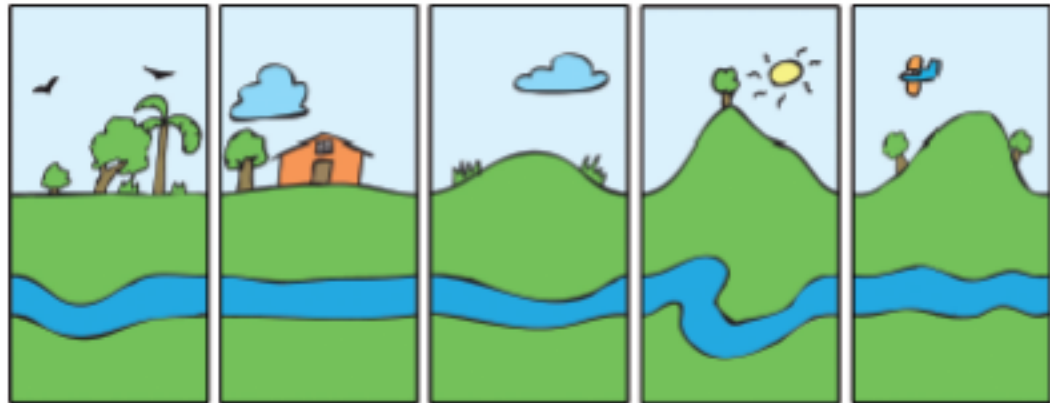
Contagem 3: permutação e resolução de exercícios de contagem

# Exercício 1

## Exercício 1. (OBMEP 2011 - N2Q13 – 1ª fase)

Podemos montar paisagens colocando lado a lado, em qualquer ordem, os cinco quadros da figura. Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo, aproximadamente, é possível evitar que uma mesma paisagem se repita?

- (a) uma semana
- (b) um mês
- (c) dois meses
- (d) quatro meses
- (e) seis meses



# Solução

---

## **QUESTÃO 13**

### **ALTERNATIVA D**

Temos cinco posições distintas para colocarmos cinco quadros também distintos. Na primeira posição temos 5 escolhas distintas possíveis. Na segunda posição temos 4 escolhas distintas, e assim por diante. Pelo princípio multiplicativo, podemos formar  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$  paisagens distintas. Como um mês tem, aproximadamente, 30 dias, podemos mudar a paisagem por aproximadamente  $\frac{120}{30} = 4$  meses.

# Exercício 2

---

## **Exercício 2. (OBMEP 2015 - N1Q5 – 1ª fase)**

Maria faz uma lista de todos os números de dois algarismos usando somente os algarismos que aparecem no número 2015. Por exemplo, os números 20 e 22 estão na lista de Maria, mas 02 não. Quantos números diferentes há nessa lista?

- (a) 8
- (b) 9
- (c) 10
- (d) 12
- (e) 16

# Solução

---

## **QUESTÃO 5**

### **ALTERNATIVA D**

Como os números devem ter dois algarismos, eles não podem ter o algarismo 0 na casa das dezenas; assim, existem 3 possibilidades para a casa das dezenas (1, 2 ou 5) e quatro possibilidades para a casa das unidades (0, 1, 2 ou 5). Pelo Princípio Fundamental da Contagem (Princípio Multiplicativo), há, portanto,  $3 \times 4 = 12$  números de dois algarismos que podem ser formados com os algarismos de 2015 (pode haver repetição de algarismos). Neste caso, os números podem ser explicitamente listados: 10, 11, 12, 15, 20, 21, 22, 25, 50, 51, 52 e 55.

# Exercício 3

---

## **Exercício 3. (OBMEP 2008 - N1Q18 – 1ª fase)**

Fábio tem cinco camisas: uma preta de mangas curtas, uma preta de mangas compridas, uma branca, uma azul e uma verde, e quatro calças: uma marrom, uma preta, uma azul e uma verde. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir com uma camisa e uma calça de cores distintas?

- (a) 12
- (b) 14
- (c) 16
- (d) 18
- (e) 20

# Solução

---

## **QUESTÃO 18** **(ALTERNATIVA C)**

Para cada uma das camisas pretas e azul é possível escolher três camisas de cor diferente, num total de  $3 \times 3 = 9$  possibilidades; notamos que estar com uma camisa preta de mangas curtas é diferente de estar com uma de mangas compridas. Para as camisas cinza e branca podemos escolher qualquer calça, num total de  $2 \times 4 = 8$  possibilidades. Ao final, temos  $9 + 8 = 17$  possibilidades.

Uma outra maneira de resolver a questão é a seguinte: são 5 as possibilidades de escolha de camisas e quatro a de calças, logo, sem levar em conta as cores, há  $5 \times 4 = 20$  modos de se vestir. Destes, devemos descontar os casos em que se repetem as cores de calça e camisa, que são apenas três: camisa preta de mangas compridas com calça preta, camisa preta de mangas curtas com calça preta e camisa azul com calça azul. Logo, são  $20 - 3 = 17$  maneiras diferentes de se vestir com uma camisa e uma calça de cores distintas.

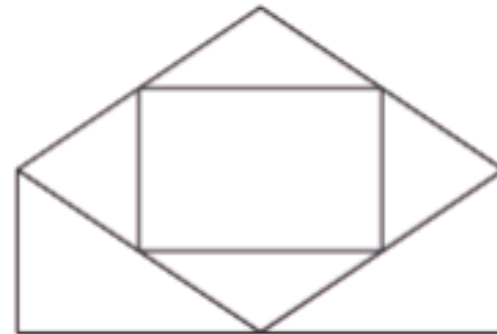
# Exercício 4

---

## Exercício 4. (OBMEP 2013 - N2Q19 – 1ª fase)

De quantas maneiras diferentes é possível pintar a figura, de modo que cada uma das regiões seja pintada com uma das cores azul, verde ou preto e que regiões cujas bordas possuem um segmento em comum não sejam pintadas com a mesma cor?

- (a) 68
- (b) 96
- (c) 108
- (d) 120
- (e) 150



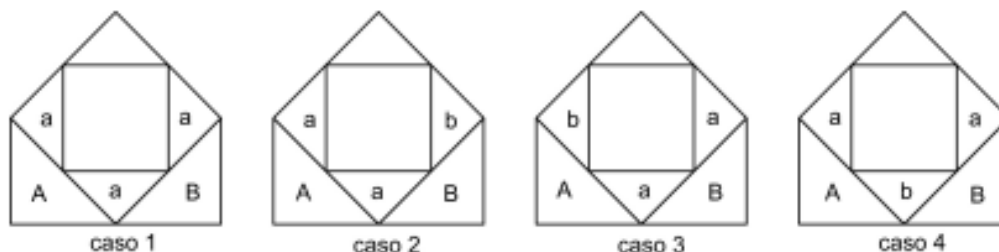


# Solução

## QUESTÃO 19

### ALTERNATIVA C

Primeiro pintamos o quadrado e o triângulo superior, o que pode ser feito de  $3 \times 2 = 6$  maneiras diferentes. Uma vez isso feito, dividimos o problema em quatro casos de acordo com as cores



dos triângulos menores da parte de baixo, como na figura. As letras minúsculas  $a$  e  $b$  indicam cores diferentes; notamos que como o quadrado já foi pintado, para os três triângulos menores só restam duas cores disponíveis. As letras maiúsculas  $A$  e  $B$  servirão apenas para denotar os triângulos maiores no que segue.

- **Caso 1:** temos duas escolhas para  $a$ ; uma vez feita essa escolha, podemos pintar  $A$  com duas cores, bem como  $B$ . Isso pode ser feito de  $2 \times 2 \times 2 = 8$  maneiras diferentes.
- **Caso 2:** temos duas escolhas para  $a$  e uma para  $b$ ; feitas essas escolhas, podemos pintar  $A$  com duas cores e  $B$  com apenas uma. Isso pode ser feito de  $2 \times 1 \times 2 \times 1 = 4$  maneiras diferentes.
- **Caso 3:** esse caso é idêntico ao caso 2.
- **Caso 4:** temos duas escolhas para  $a$  e uma para  $b$ ; feitas essas escolhas, só há uma possibilidade para pintar  $A$  e  $B$ . Isso pode ser feito de  $2 \times 1 \times 1 \times 1 = 2$  maneiras diferentes.

No total, temos  $6 \times (8 + 4 + 4 + 2) = 6 \times 18 = 108$  maneiras diferentes de pintar a figura.

# Exercício 5

---

**Exercício 5. (OBMEP 2012 - N2Q16 – 1ª fase)**

Quantos são os números naturais entre 0 e 999 nos quais aparece pelo menos um algarismo 2 e nenhum algarismo 3?

- (a) 192
- (b) 204
- (c) 217
- (d) 225
- (e) 254

# Solução

## QUESTÃO 16

### ALTERNATIVA C

Podemos pensar nos números naturais entre 0 e 999 como sequências de três algarismos de 000 até 999. Estamos interessados em contar as sequências em que aparece pelo menos um algarismo 2 e nenhum algarismo 3. Para fazer essa contagem, vamos chamar de  $a$  o número de sequências em que não aparece o algarismo 3. Essas sequências se dividem em dois tipos: aquelas em que não aparece o algarismo 2 e aquelas em que aparece pelo menos um algarismo 2; denotamos por  $b$  e  $c$ , respectivamente, o número dessas últimas sequências. Temos claramente  $a = b + c$  e queremos calcular  $c = a - b$ ; basta então calcular  $a$  e  $b$ . Mas é imediato que  $a = 9 \times 9 \times 9$  (não podemos usar o 3, logo sobram 9 algarismos) e  $b = 8 \times 8 \times 8$  (não podemos usar o 2 e o 3, logo sobram apenas 8 algarismos). Logo  $c = 9 \times 9 \times 9 - 8 \times 8 \times 8 = 729 - 512 = 217$ .

$$a = b + c: \begin{array}{l} \text{sequências} \\ \text{sem 3} \end{array} = \begin{array}{l} \text{sequências sem 3} \\ \text{e sem 2} \end{array} + \begin{array}{l} \text{sequências sem 3} \\ \text{e com 2} \end{array}$$

$$c = a - b: \begin{array}{l} \text{sequências sem 3} \\ \text{e com 2} \end{array} = \begin{array}{l} \text{sequências} \\ \text{sem 3} \end{array} - \begin{array}{l} \text{sequências sem 3} \\ \text{e sem 2} \end{array}$$

# Exercício 6

---

**Exercício 6. (OBMEP 2010 - N2Q19 – 1ª fase)**

De quantas maneiras é possível escolher três números inteiros de 1 a 19, de modo que o maior e o menor sejam ímpares e o outro seja par?

- (a) 165
- (b) 150
- (c) 140
- (d) 125
- (e) 100

# Solução

---

## QUESTÃO 19

### ALTERNATIVA A

O número central pode ser qualquer dos pares de 2 a 18. Se o número central é 2, há um único ímpar de 1 a 19 menor que ele e 9 ímpares maiores que ele; logo há  $1 \times 9 = 9$  triplas nesse caso. Se o número central é 4, há 2 ímpares menores e 8 ímpares maiores que ele; nesse caso temos  $2 \times 8 = 16$  triplas. Continuando esse processo, vemos que o número total de triplas é

$$1 \times 9 + 2 \times 8 + 3 \times 7 + 4 \times 6 + 5 \times 5 + 6 \times 4 + 7 \times 3 + 8 \times 2 + 9 \times 1 = 165.$$

# Exercício 7

---

**Exercício 7. (OBMEP 2014 - N2Q18 – 1ª fase)**

O número 2014 tem quatro algarismos distintos, um ímpar e três pares, sendo um deles 0. Quantos números possuem exatamente essas características?

- (a) 60
- (b) 180
- (c) 360
- (d) 420
- (e) 540

# Solução

---

## QUESTÃO 18

### ALTERNATIVA E

Vamos fazer essa contagem pensando em colocar os algarismos na unidade, dezena, centena e unidade de milhar do número.

Como se trata de um número de quatro algarismos, o algarismo 0 não pode ser colocado na unidade de milhar. Temos então 3 possibilidades para se colocar o algarismo 0.

Colocado o zero sobram então três posições para se colocar o algarismo ímpar, e como há cinco algarismos ímpares, temos um total de 15 possibilidades para se colocar o algarismo ímpar no número.

Colocado o algarismo 0 e o algarismo ímpar, sobram duas posições para se colocar os dois algarismos pares não nulos e distintos. Fazemos a escolha do primeiro algarismo par não nulo e o colocamos na primeira posição ainda não preenchida do número (há apenas 4 possibilidades de escolha: 2, 4, 6 e 8). Finalmente, preenchemos a última posição com outro número par não nulo, diferente daquele anteriormente colocado (3 possibilidades). Temos assim 12 possibilidades de se colocar os dois algarismos pares não nulos e distintos no número.

Pelo Princípio Multiplicativo, o total de possibilidades é  $3 \cdot 15 \cdot 12 = 540$



# Exercício 8

---

## **Exercício 8. (OBMEP 2015 – N1Q6 – 2ª fase)**

Apertando teclas de zero a nove de um cofre, Pedro cria uma senha de 11 algarismos.

- (A) Quantas são as senhas que começam com 20152015?
- (B) Quantas são as senhas que contêm todos os algarismos juntos e em ordem crescente, isto é, quantas são as senhas que contêm o bloco 0123456789?
- (C) Pedro quer criar uma senha de forma que, quando se exclui um de seus algarismos, restam os algarismos de 0 a 9 em ordem crescente. Por exemplo, 80123456789 e 01234456789 são senhas possíveis, mas 01324567890 não. Nessas condições, quantas senhas Pedro pode criar?



# Solução

---

## item a)

Para criar uma senha de 11 algarismos que inicie com o bloco 20152015, Pedro precisa apenas determinar os três últimos algarismos que definem a senha.

**20152015\_ \_ \_**

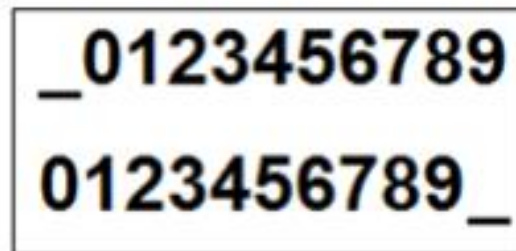
Ele pode usar qualquer um dos 10 algarismos na antepenúltima, penúltima e última posição da senha. Pelo Princípio Multiplicativo, há  $10 \times 10 \times 10 = 1000$  possibilidades. Portanto, existem mil senhas que começam com o bloco 20152015.

# Solução

---

## Item b)

Como o bloco 0123456789 é formado por 10 algarismos, resta acrescentar 1 algarismo para se criar uma senha. Esse algarismo deve ser colocado ou na primeira ou na última posição, para não “quebrar” o bloco.



The diagram consists of a rectangular box containing two lines of text. The first line shows an underscore followed by the digits 0123456789. The second line shows the digits 0123456789 followed by an underscore.

Na primeira posição é possível colocar 10 algarismos. O mesmo ocorre na última posição. Assim, pelo Princípio Aditivo, existem  $10 + 10 = 20$  senhas diferentes que contêm o bloco 0123456789.

# Solução

---

## Item c)

Para se criar uma senha de acordo com as novas condições exigidas, devemos inserir um algarismo no bloco 0123456789: à esquerda, à direita ou entre dois de seus algarismos. Há 11 espaços possíveis para se inserir um dos dez algarismos:

\_0\_1\_2\_3\_4\_5\_6\_7\_8\_9\_

Logo há, nas condições descritas,  $11 \times 10 = 110$  possibilidades de se criar senhas. Entretanto, algumas dessas senhas assim criadas são repetidas, e devemos descontá-las de nossa contagem. Observemos um exemplo: a senha 00123456789 pode ser obtida de duas maneiras diferentes:

- 00123456789 (colocando-se 0 à esquerda do número 0123456789)
- 00123456789 (colocando-se 0 entre 0 e 1 no número 0123456789)

Cada um dos algarismos de 0 a 9 pode gerar uma, e só uma, duplicação de senha. Assim, devemos descontar da contagem inicial uma senha para cada algarismo. Há, portanto,  $110 - 10 = 100$  senhas que Pedro pode criar nas condições descritas.

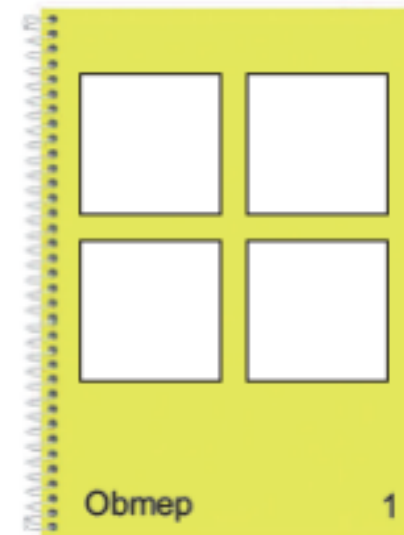
# Exercício 9

## Exercício 9. (OBMEP 2014 - N2Q2 – 2ª fase)

Rosa tem quatro cartões quadrados e cada um deles apresenta um polígono regular diferente, de 3 a 6 lados, como mostrado na ilustração.



Ela quer colar esses cartões nos quatro espaços disponíveis da primeira página de um álbum. Dependendo de como ela cola o cartão, as figuras podem ser vistas de maneiras diferentes. Por exemplo, girando o cartão com o triângulo, ele pode ser visto de quatro maneiras diferentes, enquanto que o quadrado só pode ser visto de uma única maneira, como está ilustrado a seguir.



# Exercício 9

---

- (A) De quantas maneiras diferentes o pentágono pode ser visto quando colado em um dos espaços do álbum?
- (B) De quantas maneiras diferentes o hexágono pode ser visto quando colado em um dos espaços do álbum?
- (C) De quantas maneiras diferentes Rosa pode colar os quatro cartões nos quatro espaços da primeira página do álbum?

# Solução

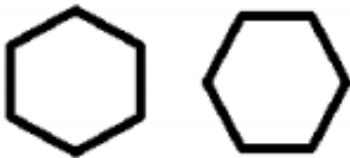
---

## Questão 2

Como os cartões são quadrados podemos girá-los como quiser. Assim, o triângulo e o pentágono podem ser colados de 4 maneiras distintas.



Já o quadrado, não importa quanto giremos, ele sempre gerará a mesma imagem; e para o hexágono teremos duas possibilidades.



# Solução

---

## **item a)**

O pentágono pode ser visualizado de 4 maneiras distintas. Basta observar que o pentágono tem um lado paralelo a um dos lados do cartão, logo há 4 lados possíveis para esse lado ficar paralelo a um dos lados do cartão.

## **Item b)**

O hexágono pode ser visualizado de 2 maneiras distintas. Basta observar que o hexágono tem dois lados opostos paralelos aos lados do cartão, logo esses lados podem estar paralelos aos lados de cima e de baixo, ou aos lados direito e esquerdo.

# Solução

---

## Item c)

Pelo princípio multiplicativo, o triângulo pode ser colado em 4 posições e de 4 maneiras distintas ( $4 \times 4 = 16$  possibilidades). O quadrado terá 3 posições possíveis de uma única maneira. O pentágono terá 2 posições possíveis e pode ser colado de 4 maneiras e o hexágono deverá ser colado na quarta e última posição, de duas maneiras possíveis.

Logo, há  $4 \times 4 \times 3 \times 1 \times 2 \times 4 \times 1 \times 2 = 768$  maneiras distintas.

## *Outra solução*

Podemos começar posicionando as figuras no álbum. Isso pode ser feito de  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$  maneiras diferentes. Depois, para cada uma das 24 maneiras, podemos modificar a posição das figuras: Triângulo, 4 maneiras; Quadrado, 1 maneira; Pentágono, 4 maneiras; Hexágono, 2 maneiras.

Logo, teremos um total de  $24 \times 4 \times 1 \times 4 \times 2 = 768$  configurações diferentes para a primeira página do álbum.



# Exercício 10

---

**Exercício 10. (OBMEP 2012 - N1Q5 – 2ª fase)**

Vítor tem 24 cartões, sendo oito azuis, oito brancos e oito verdes. Para cada cor, ele numerou os cartões de 1 a 8.

- (A) De quantas maneiras Vítor pode escolher 2 cartões azuis de modo que a soma de seus números seja igual a 9?
- (B) De quantas maneiras Vítor pode escolher 2 cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9?
- (C) De quantas maneiras Vítor pode escolher 3 cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9?

# Solução

---

a) O número 9 pode ser escrito como soma de duas parcelas inteiras de quatro maneiras diferentes:  $9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$ . Como a ordem em que os cartões são escolhidos não altera sua soma, segue que Vítor pode escolher dois cartões azuis cujos números somam 9 de 4 maneiras diferentes.

# Solução

---

b) *1ª solução:* Podemos escrever 9 como soma de dois números de 1 a 8 de 4 maneiras:  $9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$ . No caso de cartões com a mesma cor, escolhemos uma das expressões de 9 como soma e depois a cor dos cartões; como as cores são em número de 3, isso pode ser feito de  $4 \times 3 = 12$  maneiras. No caso de cartões de cores diferentes, escolhemos uma das expressões de 9, a cor de um dos cartões e uma cor diferente para o outro cartão; isso pode ser feito de  $4 \times 3 \times 2 = 24$  maneiras diferentes. No total, é possível escolher dois cartões cuja soma seja 9 de  $12 + 24 = 36$  maneiras diferentes.

*2ª solução:* Para fazer uma escolha possível, Vitor deve pegar um par de cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9. Os números desses cartões podem ser escolhidos de 4 maneiras diferentes, como vimos no item anterior. Para cada um desses pares, a cor do cartão com o menor número pode ser escolhida de 3 maneiras diferentes, bem como a cor do cartão com o maior número; no total, as cores dos cartões de um par podem ser escolhidas de  $3 \times 3 = 9$  maneiras diferentes. Como são 4 pares, o número total de escolhas é  $4 \times 9 = 36$ .

# Solução

c) 1ª solução: Há três casos a considerar.

- *Os três cartões têm a mesma cor:* as possibilidades para que sua soma 9 seja são  $9=1+2+6=1+3+5=2+3+4$ ; como são 3 cores, o número de possibilidades nesse caso é  $3 \times 3 = 9$ .
- *Dois cartões de uma cor e o terceiro de uma cor diferente:* os dois cartões da mesma cor somam de 3 a 8; as possibilidades são aqui  $3=1+2$ ,  $4=1+3$ ,  $5=1+4=2+3$ ,  $6=1+5=2+4$ ,  $7=1+6=2+5=3+4$  e  $8=1+7=2+6=3+5$ , num total de 12 possibilidades; em qualquer caso, para completar a soma 9, o terceiro cartão pode ser escolhido de uma única maneira. Para as cores, temos 3 possibilidades para os cartões de mesma cor e 2 para o de cor diferente. No total, temos  $12 \times 1 \times 3 \times 2 = 72$  possibilidades nesse caso.
- *Os cartões têm cores diferentes:* listamos a seguir as 28 possibilidades nesse caso; as letras A, B e V indicam, respectivamente, azul, branco e vermelho.

<b>A</b>	1	1	7	1	1	2	2	6	6	1	1	3	3	5	5	1	4	4	2	2	5	2	2	3	3	4	4	3
<b>B</b>	1	7	1	2	6	1	6	1	2	3	5	1	5	1	3	4	1	4	2	5	2	3	4	2	4	2	3	3
<b>V</b>	7	1	1	6	2	6	1	2	1	5	3	5	1	3	1	4	4	1	5	2	2	4	3	4	2	3	2	3

No total, o número de maneiras é então  $9 + 72 + 28 = 109$ .

# Solução

---

*2ª solução:* Para fazer uma escolha possível, Vitor deve pegar um trio de cartões cuja soma seja igual a 9. Quanto aos números, há sete possibilidades para esses trios:

$$9 = 1+1+7 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3$$

Observamos que os trios são de três tipos diferentes:

- (3,3,3) — os três números são iguais.
- (1,2,6), (1,3,5) e (2,3,4) — os três números são diferentes.
- (1,1,7), (1,4,4) e (2,2,5) — um número é repetido duas vezes e o terceiro é diferente.

Há uma única maneira de escolher cartões para o trio (3,3,3), a saber, um de cada cor. Já para os trios do segundo tipo, cada um dos números pode aparecer em qualquer das cores; nesse caso, há  $3 \times 3 \times 3 = 27$  maneiras de escolher um desses trios. Como são 3 trios, o total aqui é  $3 \times 27 = 81$  possibilidades.

Para um trio do terceiro tipo, devemos escolher duas cores distintas para os números repetidos, o que pode ser feito de 3 maneiras (AB, AV e BV) e depois uma cor qualquer para o número diferente, o que pode ser feito de 3 maneiras. Nesse caso, o total de possibilidades é  $3 \times 3 = 9$ ; como são 3 trios desse tipo, obtemos  $3 \times 9 = 27$  possibilidades.

Finalmente, o número total de possibilidades é a soma das possibilidades de cada caso, ou seja,  $1 + 81 + 27 = 109$ .

# Exercício 11

---

**Exercício 11. (OBMEP 2009 - N1Q5 – 2ª fase)**

Ana quer colorir as bolinhas das figuras 1, 2 e 3 de azul, preto ou vermelho de modo que bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes. De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir cada uma destas figuras?



Figura 1

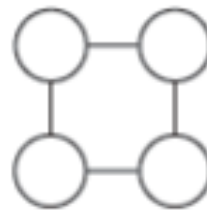


Figura 2

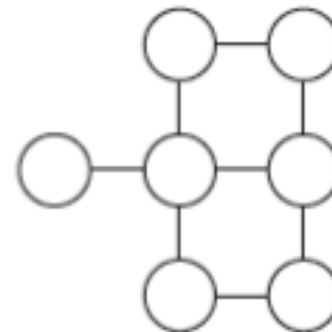


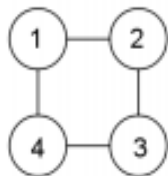
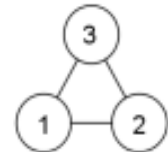
Figura 3



# Solução

## Nível 1 questão 5

a) Ana pode pintar a bolinha 1 com qualquer uma das três cores. A bolinha 2 deve então ser pintada de uma cor diferente da primeira, restando a Ana duas cores para pintá-la. A bolinha 3 deve ser pintada com a cor que sobrar. Portanto, a figura 1 pode ser pintada de  $3 \times 2 \times 1 = 6$  maneiras diferentes.



b) Vamos dividir as maneiras de pintar a figura 2 em dois casos.

*1º caso: as bolinhas 1 e 3 são pintadas da mesma cor.* Essa cor pode ser escolhida de três maneiras diferentes; após esta escolha, a cor da bolinha 2 pode ser escolhida de duas maneiras diferentes, bem como a da bolinha 4. O número de maneiras de pintar a figura 2 nesse caso é  $3 \times 2 \times 2 = 12$ .

*2º caso: as bolinhas 1 e 3 são pintadas de cores diferentes.* Nesse caso, a cor da bolinha 1 pode ser escolhida de três maneiras diferentes e após isso, restam duas possibilidades para a cor da bolinha 3. Para as bolinhas 2 e 4 há apenas uma possibilidade, que é a cor que não foi usada nas bolinhas 1 e 3. Logo o número de maneiras de pintar a figura 2 nesse caso é  $3 \times 2 \times 1 = 6$ .

No total, a figura 2 pode ser pintada de  $12 + 6 = 18$  maneiras diferentes.

# Solução

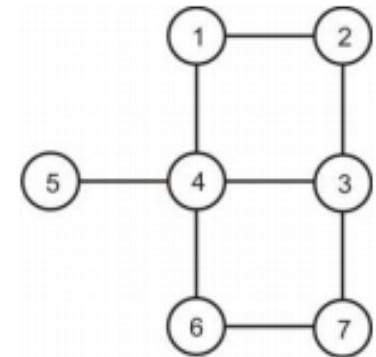
---

c) As bolinhas de 1 a 4 formam a figura do item anterior e portanto, para pintá-las, Ana tem 18 possibilidades. Para pintar a bolinha 5, ele tem duas cores disponíveis, pois a bolinha 4 já está pintada. Logo temos  $18 \times 2 = 36$  possibilidades para pintar as bolinhas de 1 a 5. Dividimos agora nossa contagem em dois casos:

*1º caso: as bolinhas 3 e 6 são pintadas da mesma cor.* Nesse caso, temos uma única escolha para a cor da bolinha 6 (pois a bolinha 3 já foi pintada) e duas para a bolinha 7, ou seja, temos  $1 \times 2 = 2$  possibilidades.

*2º caso: as bolinhas 3 e 6 são pintadas de cores diferentes.* Nesse caso também temos uma única escolha para a cor da bolinha 6 (diferente das cores das bolinhas 3 e 4) e sobra apenas uma cor para a bolinha 7. Aqui temos apenas uma possibilidade.

No total, há  $36 \times 2 + 36 \times 1 = 108$  maneiras diferentes de pintar a figura 3.





# Exercício 12

---

**Exercício 12. (OBMEP 2005 - N1Q6 – 2ª fase)**

Pedrinho escreveu todos os números inteiros compreendidos entre 100 e 999 cuja soma dos algarismos é 12. Por exemplo, os números 129 e 750 aparecem entre os números escritos.

- (A) Quantos números escritos têm apenas dois algarismos iguais?
- (B) Quantos números escritos são formados apenas por algarismos ímpares?

# Solução

---

**A)** O algarismo 1 não pode ser repetido porque não é possível escrever 12 como uma soma da forma  $1+1+x$  onde  $x$  é um algarismo; de fato, como  $x$  é no máximo 9, esta soma será no máximo 11. O algarismo 4 também não pode ser repetido pois neste caso o número teria que ser 444, que tem três algarismos iguais e não está de acordo com o enunciado. Finalmente, os algarismos 7, 8 e 9 não podem ser repetidos, pois neste caso a soma dos algarismos ultrapassaria 12. Assim, o algarismo repetido só pode ser 2, 3, 5 ou 6. Com 2, 3 e 5 podemos formar 9 números: 228, 282, 822, 336, 363, 633, 552, 525 e 255. Com o algarismo 6 podemos formar 2 números: 606 e 660. Portanto a quantidade de números escrita é  $9 + 2 = 11$ .

**B)** A soma de três números ímpares é um número ímpar. Como 12 é par, vemos que é impossível achar três algarismos ímpares cuja soma é 12. Logo nenhum dos números escritos tem os três algarismos ímpares.