<u>Lista de Exercícios – N3C1 – Encontros 1 e 2 – Marcos Assumpção - CEPAC</u>

1) Na divisão euclidiana de 802 por $d > 0$ o quociente é 14 e o resto é r . Quais são os possíveis valores para d e r?

2) O produto de um número de três algarismos por 7 termina (à direita) em 638. Qual é esse número?

3) Determine todos os algarismos x e y tais que o número $2x7y$ seja divisível por 4 e por 11.

4) Os inteiros de 1 a 10 estão escritos no quadro. Dois números quaisquer a e b são apagados e substituídos pelo número $a-b$. Depois desse processo ser repetido diversas vezes, pode acontecer do único número restante no quadro ser zero? (*Dorichenko, problema 20.7*)

5) Exercício 6, página 6, Apostila do PIC "Encontros de Aritmética".

6) Exercício 20, página 13, Apostila do PIC "Encontros de Aritmética".

7) Exercício 5, página 31, Apostila do PIC "Encontros de Aritmética".

8) Um inteiro é dito um *quadrado perfeito* quando é igual ao quadrado de um inteiro.
a) Mostre que se um quadrado perfeito é divisível por 3, então é divisível por 9.
b) Um número escrito com cem algarismos iguais a 0, cem iguais a 1 e cem iguais a 2, pode ser um quadrado perfeito?
(*Dica para o item b*: aplique os critérios de divisibilidade por 3 e por 9)
(*Fomin, capítulo 3, problema 10*)

<u>O QUE ESTUDAR PARA RESOLVER ESSA LISTA:</u>

- <u>Assuntos a serem abordados</u>: **Aritmética** – paridade, sistema decimal, divisão euclidiana, critérios de divisibilidade.

- <u>Texto para consulta</u>: seções 1.1, 1.2, 2.1, 2.4, e 2.6 da Apostila do PIC da OBMEP "Encontros de Aritmética", F. Dutenhefner, L. Cadar (http://www.obmep.org.br/docs/aritmetica.pdf).

SOLUÇÕES:

1) Tem-se $802 = 14d + r$, sendo $0 \leq r \leq d - 1$. Como $r = 802 - 14d$ e $0 \leq r \leq d - 1$, então $0 \leq 802 - 14d \leq d - 1$, ou seja, $14d \leq 802$ e $15d \geq 803$. Mas, $14d \leq 802$ se, e somente se, $d \leq 57$, e $15d \geq 803$ se, e somente se, $d \geq 54$. Assim, deve-se ter $d \leq 58$ e $d \geq 54$, ou seja, d pode ser igual a 54 ou 55 ou 56 ou 57, sendo que os respectivos valores de r são iguais a 46 ou 32 ou 18 ou 4. Portanto, os possíveis valores para d e r são $(d, r) = (54, 46), (55, 32), (56, 18)$ ou $(57, 4)$.

2) Seja abc representação decimal do número procurado. Então, o número $(100a + 10b + c) \cdot 7 = 700a + 70b + 7c$ termina em 638. Como o algarismo das unidades de $700a + 70b + 7c$ é o mesmo algarismo das unidades de $7c$, então o algarismo das unidades de $7c$ deve ser igual a 8. Como $c \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, conclui-se que a única possibilidade é $c = 4$. Assim, $(100a + 10b + c) \cdot 7 = 700a + 70b + 7c = 700a + 70b + 28$. Como o algarismo das dezenas de $700a + 70b + 28$ é o mesmo algarismo das dezenas de $70b + 20$, então o algarismo das dezenas de $70b + 20$ deve ser igual a 3. Como $b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, conclui-se que a única possibilidade é $b = 3$. Assim, $(100a + 10b + c) \cdot 7 = 700a + 70b + 28 = 700a + 238$. Como o algarismo das centenas de $700a + 238$ é o mesmo algarismo das centenas de $700a + 200$, então o algarismo das centenas de $700a + 200$ deve ser igual a 6. Como $a \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, conclui-se que a única possibilidade é $a = 2$. Assim, o número procurado é $abc = 234$.

3) Tem-se que $2x7y$ é divisível por 4 se, e somente se, $7y = 70 + y$ é divisível por 4. Como $70 = 4 \cdot 17 + 2$, então $2x7y$ é divisível por 4 se, e somente se, $y + 2$ é divisível por 4. Como $y \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, conclui-se que $y + 2$ é divisível por 4 se, e somente se, $y = 2$ ou $y = 6$. Por outro lado, $2x7y$ é divisível por 4 se, e somente se, $x + y - 2 - 7 = x + y - 9$ é divisível por 11. Para $y = 2$, $x + y - 9 = x + 2 - 9 = x - 7$ é divisível por 11 se, e somente se, $x = 7$, já que $x \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Para $y = 6$, $x + y - 9 = x + 6 - 9 = x - 3$ é divisível por 11 se, e somente se, $x = 3$, já que $x \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Assim, os possíveis valores para x e y tais que o número $2x7y$ seja divisível por 4 e por 11 são $(x, y) = (7, 2)$ e $(x, y) = (3, 6)$.

4) Não. Inicialmente, a soma dos números no quadro é igual a $1 + 2 + \cdots + 10 = 55$, que é um número ímpar. Em cada etapa, ao apagarmos dois números a e b, e substituí-los pelo número $a - b$, a soma dos números do quadrado diminui de $a + b - (a - b) = 2b$. Como $2b$ é par e a subtração por um número par não altera a paridade, então a soma dos números no quadro sempre tem a mesma paridade. Como inicialmente, essa soma é

ímpar, então permanecerá sempre ímpar e, logo, não pode ocorrer do único número restante no quadro ser zero, que é par.

5) *A solução está em seguida ao enunciado do exercício na apostila.*

6) *A solução está em seguida ao enunciado do exercício na apostila.*

7) *A solução está em seguida ao enunciado do exercício na apostila.*

8)
a) Seja x^2 um quadrado perfeito divisível por 3, sendo x um inteiro. Pela Divisão Euclidiana, x é da forma $3q$ ou é da foram $3q + 1$ ou é da forma $3q + 2$, sendo q um inteiro. Se x é da forma $3q + 1$, então $x^2 = (3q + 1)^2 = 3(3q^2 + 2q) + 1$ não é divisível por 3, o que não é verdade. Se x é da forma $3q + 2$, então $x^2 = (3q + 2)^2 = 3(3q^2 + 4q + 1) + 1$ não é divisível por 3, o que não é verdade. Assim, só resta concluir que x é da forma $3q$ e, portanto, $x^2 = (3q)^2 = 9q^2$ é múltiplo de 9.
b) Não. A soma dos algarismos do número é igual a $100 \cdot (0 + 1 + 2) = 300$, que é divisível por 3 e não é divisível por 9. Assim, o número é divisível por 3 e não é divisível por 9 e, logo, pelo item a), não pode ser um quadrado perfeito.