Ciclo 5 – Encontro 3

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS DE ALGUNS LUGARES GEOMÉTRICOS

Nível 3
PO: Márcio Reis
11° Programa de Iniciação Científica Jr.

Construções geométricas de alguns lugares geométricos

- Apostila 8: “Uma Introdução às Construções Geométricas”, Eduardo Wagner.
  - Lugares Geométricos
    - A Paralela
    - A Mediatriz
    - A Bissetriz
    - O Arco Capaz

Lugares Geométricos

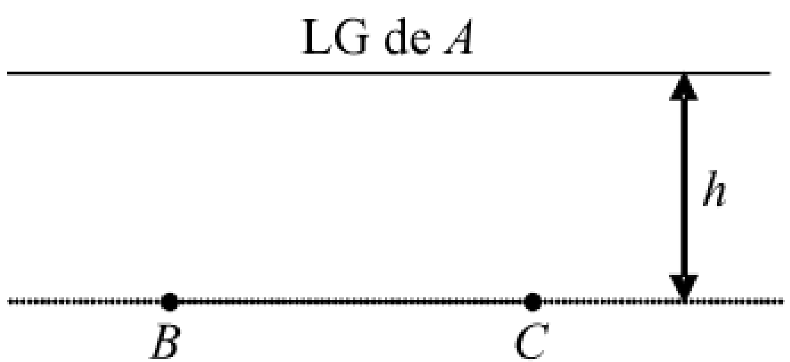
As primeiras ferramentas das construções geométricas são os lugares geométricos básicos. Essas figuras, que estudaremos a seguir, permitirão desenvolver um método de construção que é baseado nas propriedades das figuras.

O que é um lugar geométrico?

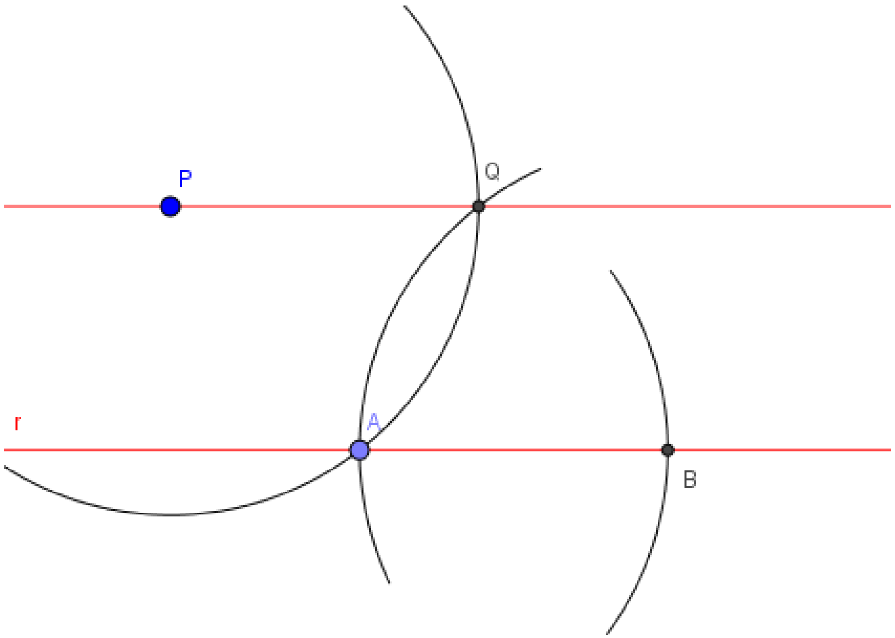
A expressão (muito antiga) lugar geométrico, nada mais é que um conjunto de pontos e, para definir tal conjunto, devemos enunciar uma propriedade que esses pontos devem ter. Se essa propriedade é p, o conjunto dos pontos que possuem p é o lugar geométrico da propriedade p. Por exemplo, o lugar geométrico dos pontos que distam 5cm de um ponto A é a circunferência de centro A e raio 5cm.

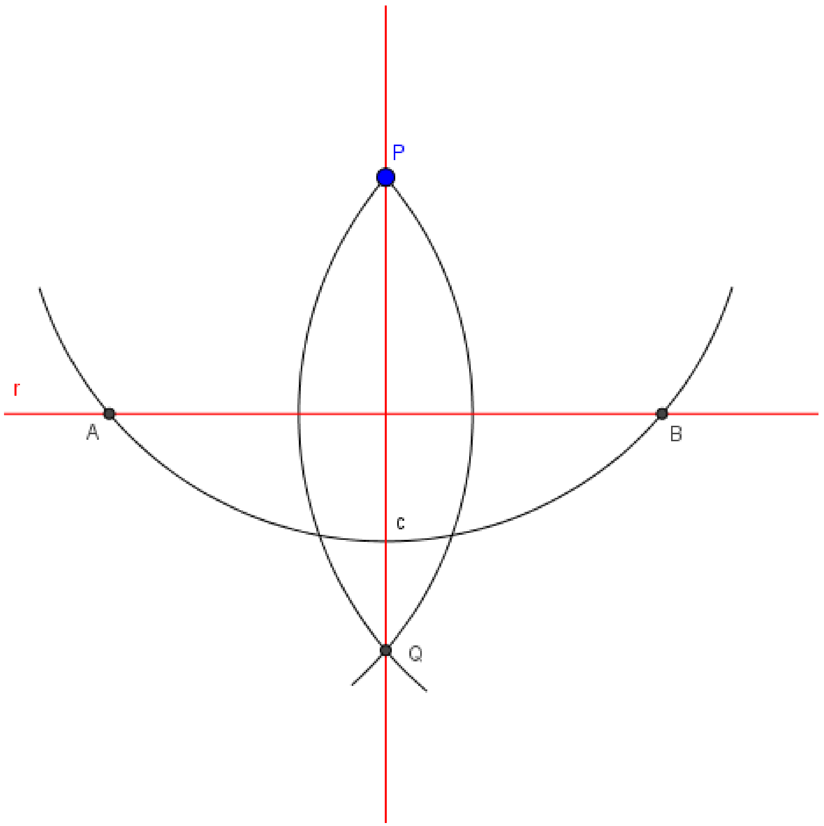
A Paralela

Imagine que a base BC de um triângulo ABC é dada e que a altura (h) relativa a esta base é também dada. Então, conhecemos a distância do vértice A até a reta BC e o lugar geométrico do vértice A é, portanto, uma reta paralela à reta BC distando h dela.



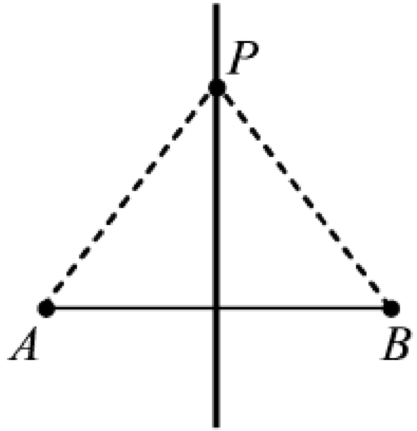
Relembrando – Paralela e Perpendicular





A Mediatriz

A mediatriz de um segmento AB é a reta perpendicular a AB que contém o seu ponto médio. Veja que todo ponto da mediatriz tem mesma distância aos extremos do segmento.

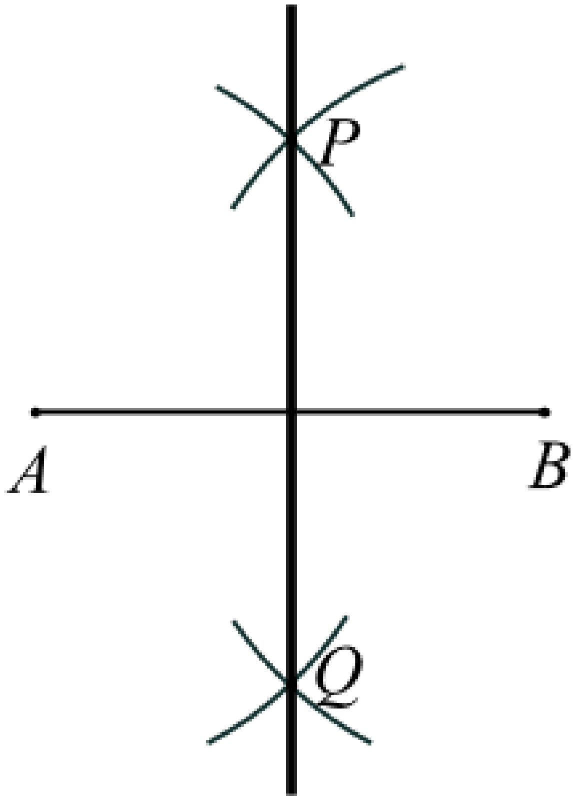


A Mediatriz

Observe também que se um ponto não está na mediatriz de AB então ele não equidista de A e B. Portanto, dizemos que a mediatriz de um segmento AB é o *lugar geométrico dos pontos que equidistam de A e B.*

Para construir, traçamos dois arcos de circunferência com centros em A e B e com interseções P e Q

A Mediatriz



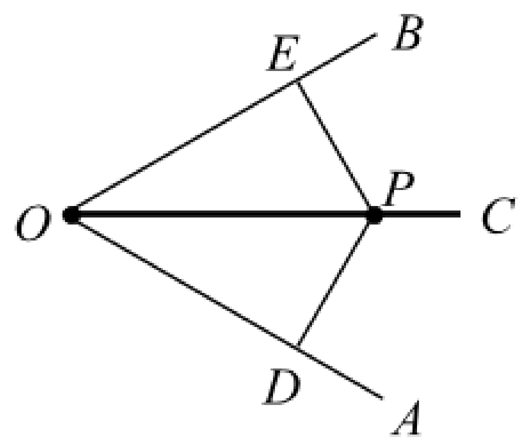
A Bisetriz

A bissetriz de um ângulo $A\widehat{O}B$ é a semirreta OC tal que

$$A\widehat{O}C = C\widehat{O}B.$$

Costumamos dizer que a bissetriz "divide" o ângulo em dois outros congruentes. Todo ponto da bissetriz de um ângulo equidista dos lados do ângulo. Na figura a seguir, P é um ponto da bissetriz OC do ângulo $A\widehat{O}B$ e PD e PE são perpendiculares aos lados OA e OB.

A Bissetriz

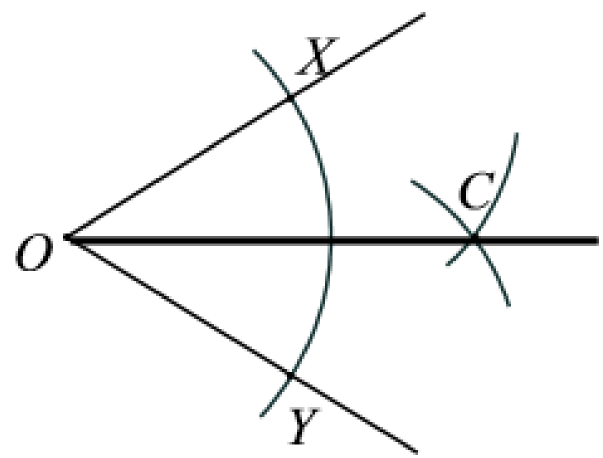


Como os triângulos retângulos OPD e OPE são congruentes, temos $PD = PE$.

A Bissetriz

Para construir a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ traçamos com centro em O um arco de circunferência cortando os lados do ângulo em X e Y.

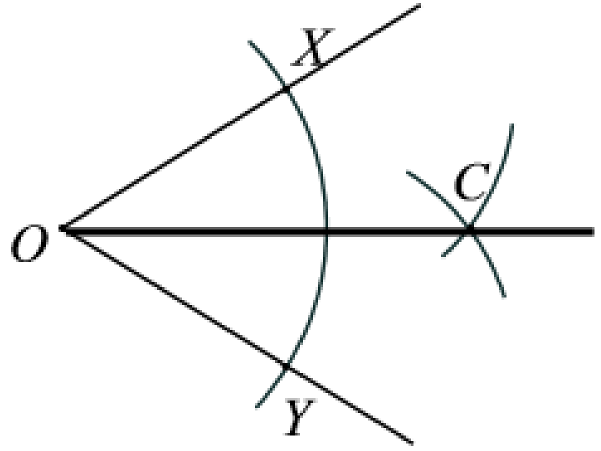
Em seguida, traçamos dois arcos de mesmo raio com centros em X e Y que se cortam em C.A semirreta OC é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$. Qual é a justificativa?



A Bissetriz

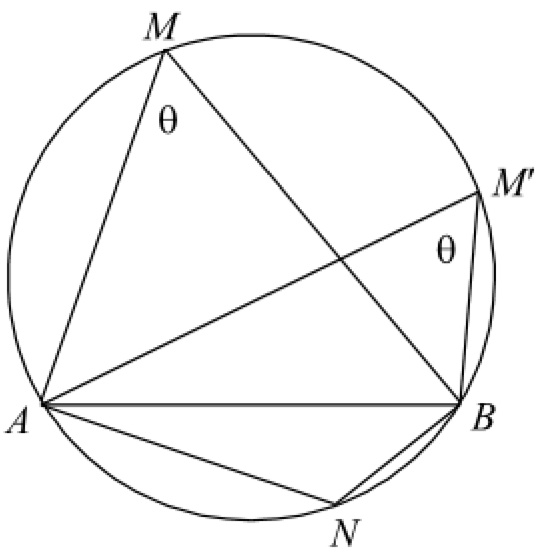
Para construir a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ traçamos com centro em O um arco de circunferência cortando os lados do ângulo em X e Y.

Em seguida, traçamos dois arcos de mesmo raio com centros em X e Y que se cortam em C.A semirreta OC é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$. Qual é a justificativa?



O Arco Capaz

Considere dois pontos A e B sobre uma circunferência. Para todo ponto M sobre um dos arcos, o ângulo $AMB = \theta$ é constante.



O Arco Capaz

Um observador que percorra o maior arco AB da figura acima, consegue ver o segmento AB sempre sob mesmo ângulo. Este arco chama-se *arco capaz do ângulo* θ *sobre o segmento* AB.

O Arco Capaz

Construção do arco capaz:

São dados o segmento AB e o ângulo α. Para construir o lugar geométrico dos pontos que conseguem ver AB segundo ângulo α faça o seguinte:

1) Desenhe a mediatriz de AB.

2) Trace a semirreta AX tal que $B\widehat{A}X = \alpha$.

3) Trace por A a semirreta AY perpendicular a AX.

4) A interseção de AY com a mediatriz, é o ponto O, centro do arco capaz.

O Arco Capaz

Construção do arco capaz:

São dados o segmento AB e o ângulo α. Para construir o lugar geométrico dos pontos que conseguem ver AB segundo ângulo α faça o seguinte:

1) Desenhe a mediatriz de AB.

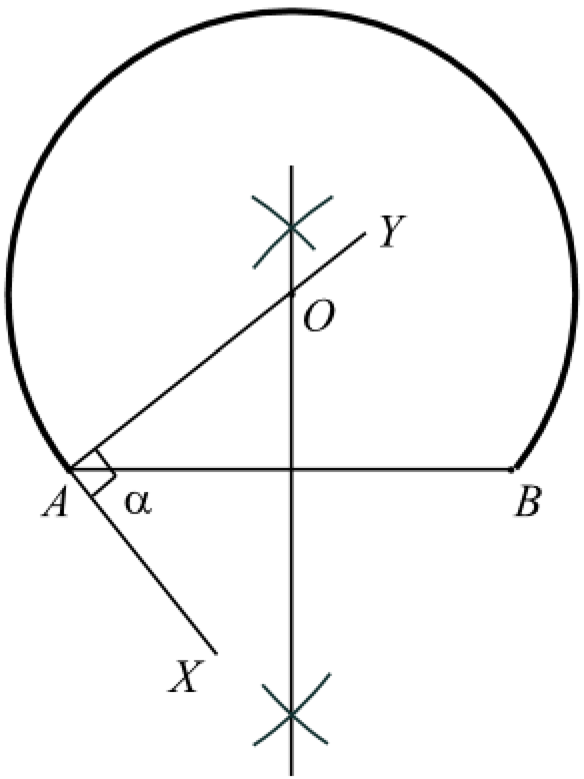
2) Trace a semirreta AX tal que $B\widehat{A}X = \alpha$.

3) Trace por A a semirreta AY perpendicular a AX.

4) A interseção de AY com a mediatriz, é o ponto O, centro do arco capaz.

O Arco Capaz

Com centro em O desenhe o arco AB.



O Arco Capaz

O arco AB que você desenhou é o lugar geométrico do ângulo α construído sobre o segmento AB. Para justificar, observe que se $B\widehat{A}X = \alpha$ então $B\widehat{A}Y = 90° - \alpha$ e, sendo M o ponto médio de AB, temos que $A\widehat{O}M = \alpha$. Assim $A\widehat{O}B = 2\alpha$ e, para qualquer ponto M do arco AB tem-se $A\widehat{M}B = \alpha$.

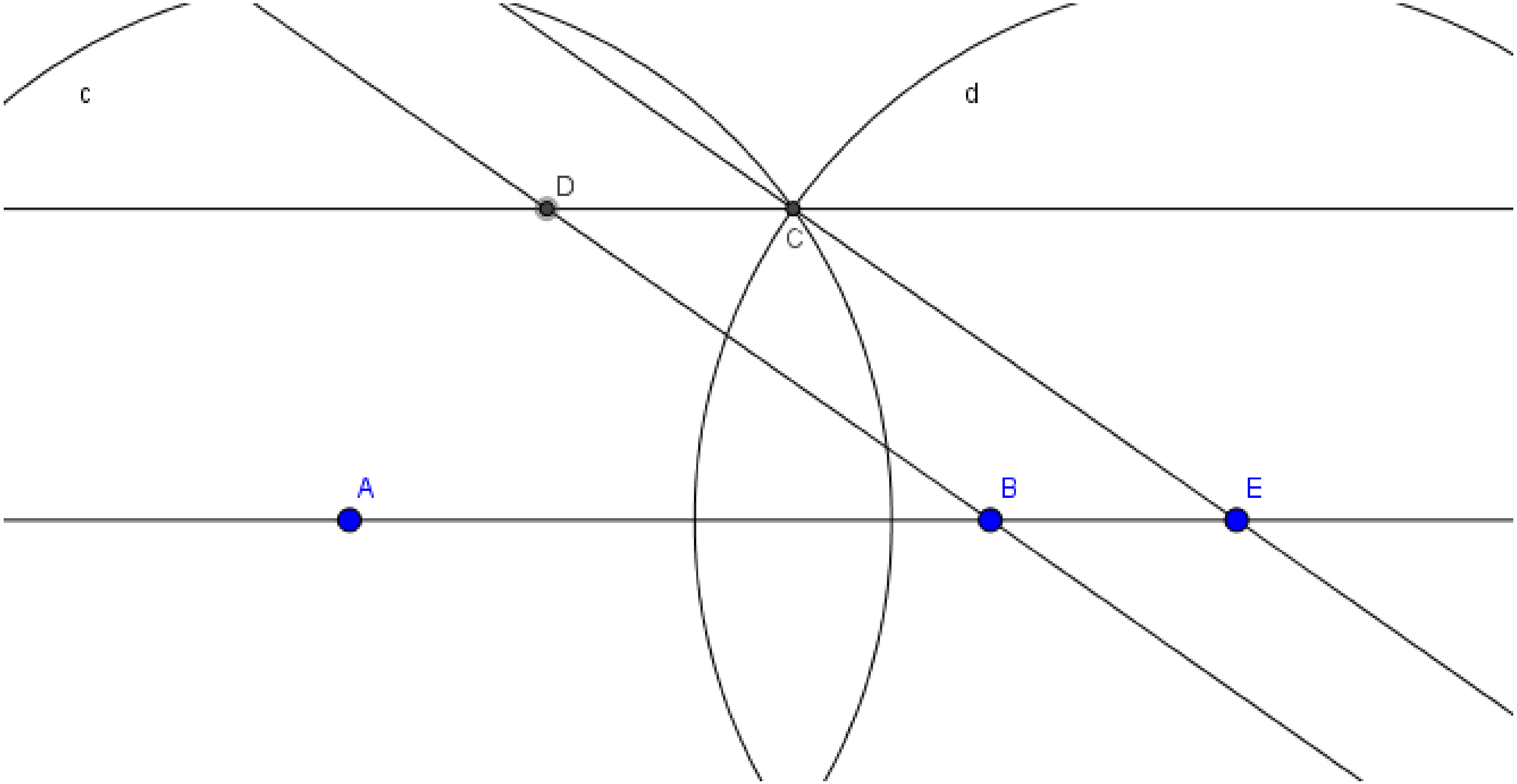
Exercício 1

Construa o trapézio isósceles que tem bases medindo 6,5 cm e 2,5 cm e diagonais medindo 5,5 cm.

Exercício 1 - Solução

Em uma reta r, marque um segmento de reta AB medindo 6,5 cm e o segmento de reta BE medindo 2,5 cm, de modo que B esteja entre A e E. Trace as circunferências centradas em A e E ambas de raio medindo 5,5 cm, e seja C um dos pontos de interseção destas duas circunferências. Em particular, tem-se $AC = CE = 5{,}5$ cm. Trace a reta s paralela à reta r passando por C (a construção da reta paralela a uma reta dada passando por um ponto dado é mostrada na página 5 da Apostila 8). Trace a reta t passando por B e que é paralela à reta que contém os pontos C e E, e seja D o ponto de interseção das retas s e t. Como as retas r e s são paralelas e a reta t é paralela à reta que contém os pontos C e E, então $BECD$ é um paralelogramo e, logo, $CD = BE = 2{,}5$ cm e $BD = CE = 5{,}5$ cm. Como $AB = 6{,}5$ cm, $CD = 2{,}5$ cm e $AC = BD = 5{,}5$ cm, então $ABCD$ é o trapézio isósceles pedido.

Exercício 1 - Solução



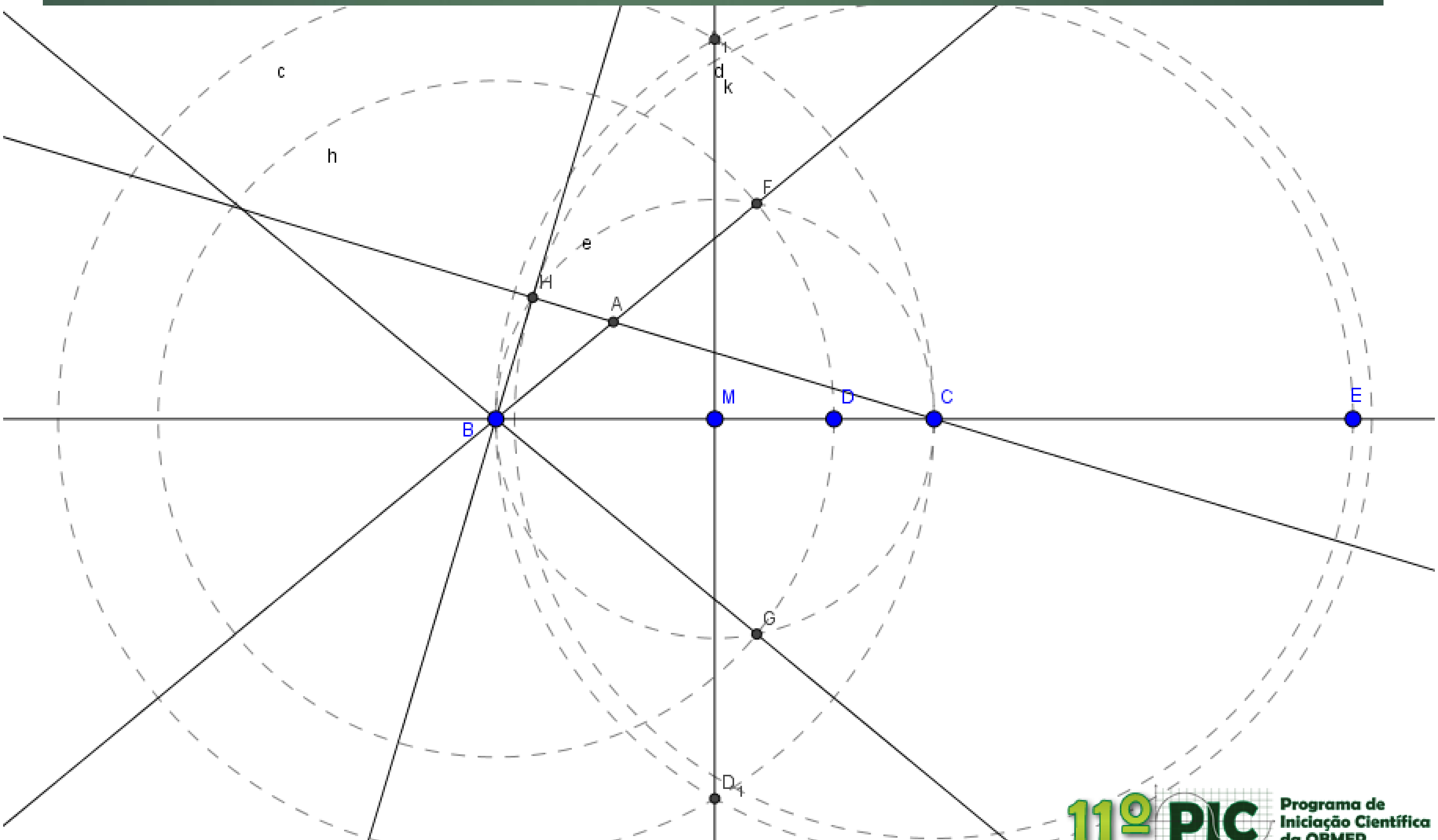
Exercício 2

Construir o triângulo ABC conhecendo o lado $BC = 7$ cm e as alturas $BD = 5{,}4$ cm e $CE = 6{,}7$ cm .

Exercício 2 - Solução

Dado o segmento de reta $BC = 7\text{ cm}$, traçamos a circunferência centrada em B de raio BC e a circunferência centrada em C de raio BC. Traçamos a reta que passa pelos pontos de interseção dessas duas circunferências. Tal reta intersecta BC em seu ponto médio M. Traçamos a circunferência C_1 centrada em M de raio BM. Tal circunferência tem BC como um de seus diâmetros. Dado o segmento de reta $BD = 5{,}4\text{ cm}$, traçamos a circunferência C_2 centrada em B de raio BD. Dado o segmento de reta $CE = 6{,}7\text{ cm}$, traçamos a circunferência C_3 centrada em C de raio CE. A circunferência C_2 intersecta a circunferência C_1 no ponto D de modo que o ângulo $B\hat{D}C$ é reto, já que BC é diâmetro de C_1. A circunferência C_3 intersecta a circunferência C_1 no ponto E de modo que o ângulo $B\hat{E}C$ é reto, já que BC é diâmetro de C_1. Seja A o ponto de interseção das retas CD e BE. Como BD é perpendicular a AC e CE é perpendicular a AB, então o triângulo ABC tem BD e CE como alturas.

Exercício 2 - Solução



Exercício 3

Construir o triângulo ABC de perímetro 11cm sabendo que os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ medem, respectivamente, 58° e 76°.

Exercício 3 – Solução

Trace uma reta e sobre ela marque um segmento de reta PQ de medida 11cm. Construa a bissetriz do ângulo de 58°, obtendo assim um ângulo de 29°. Trace o ângulo $QPU = 29^\circ$. A construção do ângulo $QPU = 29^\circ$ a partir de um ângulo de 29° está descrita no Problema 4 da pág. 11 da Apostila 8. Construa a bissetriz do ângulo de 76°, obtendo assim um ângulo de 38°. Trace o ângulo $PQV = 38^\circ$, de modo que o ponto V esteja no mesmo semiplano do ponto U relativamente à reta PQ. Marque o ponto A de interseção da reta PU com a reta QV. Trace a mediatriz do segmento de reta AP (a construção da mediatriz de um segmento de reta está descrita na pág. 19 da Apostila 8) e marque o ponto B de interseção desta mediatriz com a reta PQ. O ponto B está no segmento PQ. Trace a

Exercício 3 – Solução

mediatriz do segmento de reta AQ e marque o ponto C de interseção desta mediatriz com a reta PQ. O ponto C está no segmento BQ. Obtém-se assim um triângulo ABC. Como B pertence à mediatriz de AP, então $BP = AB$. Como $BP = AB$, então no triângulo ABP os ângulos internos nos vértices P e A são congruentes e, logo, o ângulo interno de ABP no vértice A mede 28°. Como o ângulo interno de ABC no vértice B é um ângulo externo de ABP, então, pelo Teorema do Ângulo Externo, ele mede $29^\circ + 29^\circ = 58^\circ$. Analogamente, conclui-se que $CQ = AC$ e que o ângulo interno de ABC no vértice C mede $38^\circ + 38^\circ = 76^\circ$. Como o ponto B está entre P e Q, e o ponto C está entre B e Q, então $PB + BC + CQ = PQ = 11\,\text{cm}$. Como $PB = AB$, $CQ = AC$ e $PB + BC + CQ = PQ = 11\,\text{cm}$, então $AB + BC + AC = 11\,\text{cm}$, ou seja, ABC tem perímetro $11\,\text{cm}$. Assim, ABC é mesmo o triângulo procurado.

Exercício 4

Desenhe o triângulo ABC *conhecendo os lados* $AB = 4{,}5\,cm$, $BC = 5{,}2\,cm$ *e a altura relativa ao lado* $BC = 3{,}8\,cm$.

Exercício 4 - Solução

Solução: Trace uma reta r e sobre ela o segmento BC com o comprimento dado. Longe de BC desenhe uma reta perpendicular a r e seja X o ponto de interseção (ver figura 10). Assinale sobre ela o segmento $XY = 3{,}8\,\text{cm}$ e trace por Y uma paralela à reta r. Este é o lugar geométrico do vértice A.

Longe do seu desenho, construa um segmento de $4{,}5\,\text{cm}$ usando a régua. Agora, ponha o compasso com esta abertura e, com centro em B, desenhe uma circunferência com este raio. A circunferência cortará a reta paralela em dois pontos mostrando que há duas soluções (diferentes) para o problema.

Exercício 4 - Solução

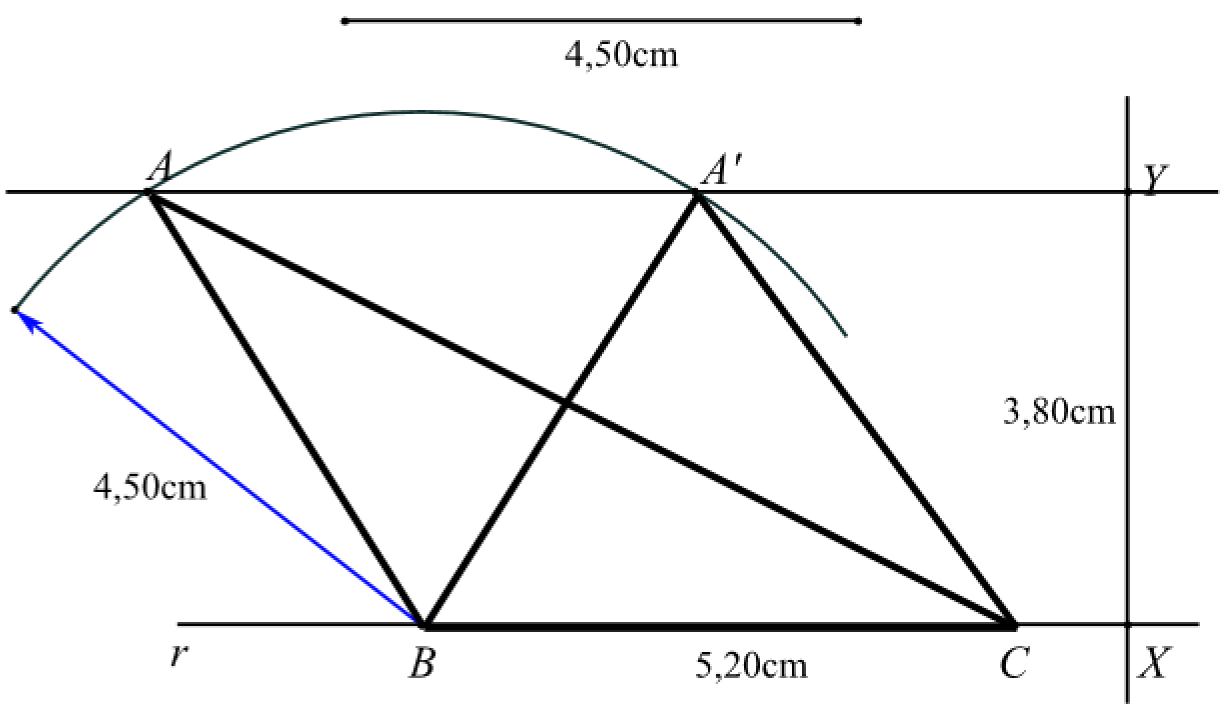


Figura 10

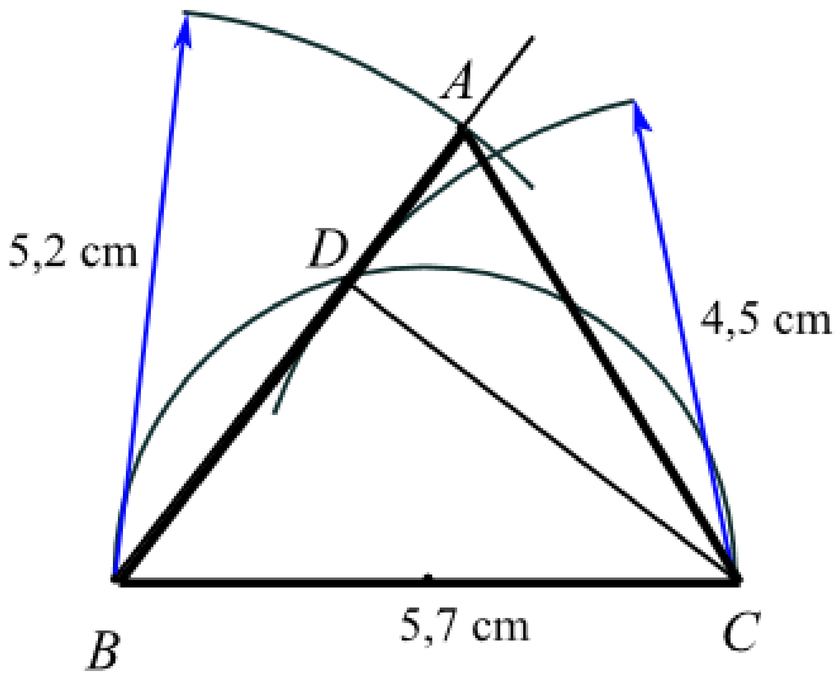
Exercício 5

Construir o triângulo ABC *conhecendo os lados* $AB = 5{,}2\,cm$, $BC = 5{,}7\,cm$ *e a altura relativa ao lado* AB, $h = 4{,}5\,cm$.

Exercício 5 - Solução

Solução: Faça um desenho imaginando o problema resolvido e seja $CD = h$ a altura relativa ao lado AB. Como o ângulo $B\widehat{D}C$ é reto, o ponto D pertence ao arco capaz de $90°$ construído sobre BC. Como CD é conhecido, determinamos o ponto D. Sobre a reta BD determinamos o ponto A e o problema está resolvido.

Exercício 5 - Solução



Estudar para o próximo encontro!

Próximo encontro: 26/11, sábado, às 08h30

Vídeoaulas do Portal da Matemática:
Módulo: "Aritmética dos Restos"
http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=63
Vídeoaulas:
"Tabelas de multiplicação da Aritmética Modular"
"Existência de inverso mod "
"Unicidade da classe inversa"
"Pode 10000 ser escrito como a soma de dois cubos perfeitos?"